Ressources pour le lycée général et technologique

Ressources pour la classe de première
générale et technologique

Analyse

mars 2012

Table des matières

Introduction

L'enseignement de l'analyse en classe de première constitue un enjeu d'importance pour la formation mathématique des élèves. L'objectif est de doter ces derniers d'outils mathématiques permettant de traiter des problèmes relevant de la modélisation de phénomènes continus ou discrets.

Les outils classiques, comme les fonctions, la dérivation et les suites, prennent vie tout au long de la classe de première. Les grandes problématiques du programme, éclairées par quelques scénarios pédagogiques développés tout au long de ce document ressource, sont :

P1 : Comment prendre en compte les acquis des élèves ?

P2 : Comment intégrer les outils-logiciels aux pratiques de classe ?

P3 : Comment travailler par compétences au lycée ?

P4 : Comment utiliser des évaluations diagnostiques ?

P5 : Comment différencier l'enseignement?

P6 : Comment favoriser la diversité de l'activité mathématique des élèves ?

P7 : Comment faire vivre l'algorithmique, la logique et le raisonnement ?

P8 : Comment aider les élèves à analyser leurs erreurs ? (ou à les rendre autonomes, critiques face à leurs résultats ?)

P9 : Comment varier les évaluations (diagnostiques, formatives, sommatives) ou comment différencier les évaluations ?

Une équipe d'enseignants propose dans ce document ressource des pistes, des perspectives, des activités qui relient les contenus et les capacités énoncés dans le programme de première à la classe.

1. Second degré

En classe de seconde, les élèves ont abordé les fonctions polynômes de degré 2. Ils en connaissent les variations (monotonie, extremum) et la propriété de symétrie de leurs courbes représentatives. Ces résultats ont pu, selon le choix du professeur, être partiellement ou totalement admis.

Les situations sur le second degré en classe de première doivent donc prendre appui sur ces acquis de la classe de seconde. Les exemples de scénarios pédagogiques suivants proposent des activités autour de ce thème.

Extrait du programme de première S :

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Second degré Forme canonique d'une fonction polynôme de degré deux. Équation du second degré, discriminant. Signe du trinôme.	• Utiliser la forme la plus adéquate d'une fonction polynôme de degré deux en vue de la résolution d'un problème : développée, factorisée, canonique.	On fait le lien avec les représentations graphiques étudiées en classe de seconde. La mise sous forme canonique n'est pas un attendu du programme. ◇ Des activités algorithmiques sont réalisées dans ce cadre.

Un exemple d'activité sur le second degré

Problématiques développées : P1, P2, P3, P6, P8 et P9.
Activité expérimentée en série S, transférable en ES/L.
Place dans la progression : en début d'année scolaire.

Objectifs pédagogiques	Approfondir la notion de second degré. Former les élèves à la pratique d'une démarche scientifique. Évaluer individuellement les acquis des élèves.
Compétences	Mettre en œuvre une recherche de manière autonome. Avoir une attitude critique vis-à-vis des résultats obtenus. Communiquer à l'écrit.
Connaissances	La parabole. Calculs d'aires.
Logiciels	*GeoGebra*. *Xcas*. Calculatrice.
Modalités de gestion de classe	Travail en groupes. Activité en autonomie.

Afin d'en préserver la cohérence globale, la séquence pédagogique qui suit est présentée telle qu'elle a été testée et dans son ensemble. Il appartient à l'enseignant de l'adapter à sa classe.

La situation géométrique étudiée est classique. La démarche pédagogique spécifique vise à construire des compétences amorcées en classe de seconde :

- « mettre en œuvre une recherche de façon autonome » (le professeur devient une ressource, secours de l'élève ou du groupe d'élèves) ;
- « mener des raisonnements » ;
- « avoir une attitude critique vis-à-vis des résultats obtenus » ;
- « communiquer à l'écrit et à l'oral ».

grâce à la diversité de l'activité de l'élève (expérimenter, raisonner, démontrer, trouver des résultats partiels et les mettre en perspective, expliquer oralement une démarche, communiquer un résultat par oral ou par écrit, choisir et appliquer des techniques de calcul).

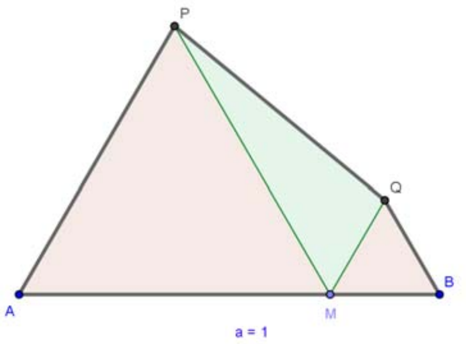
Scénario pédagogique

Au cours de l'année précédente, le professeur a récupéré les travaux de ses élèves sur ce même exercice. À partir de ces matériaux, l'enseignant va proposer à sa classe cinq démarches d'élèves qui permettent d'étudier différentes stratégies de résolution mises en place par les apprenants.

Le scénario pédagogique se déroule sur cinq séances d'une heure. Un devoir surveillé conclut l'activité présentée. Durant chaque séance, les élèves sont répartis par groupes de 5. À chaque séance, la consigne donnée par le professeur est d'étudier la démarche de résolution présentée dans les documents distribués. Un élève du groupe est chargé de finaliser le travail demandé et de le rendre au professeur en fin de séquence. En début de la séance suivante, un retour est effectué à l'oral sur les productions des groupes. Les cinq séances se sont déroulées durant le mois de septembre. La salle informatique est utilisée à chaque fois que cela est nécessaire. Précisons enfin que cette activité a donné lieu à deux devoirs maison qui ont permis à chacun de rédiger les analyses faites en groupes, ainsi qu'à la réalisation d'un poster portant sur la synthèse relative aux fonctions polynômes du second degré (définition, courbe, tableau de variation, sommet).

Énoncé de l’exercice

M est un point libre sur le segment [AB] de longueur 1. Les triangles AMP et MBQ sont équilatéraux.



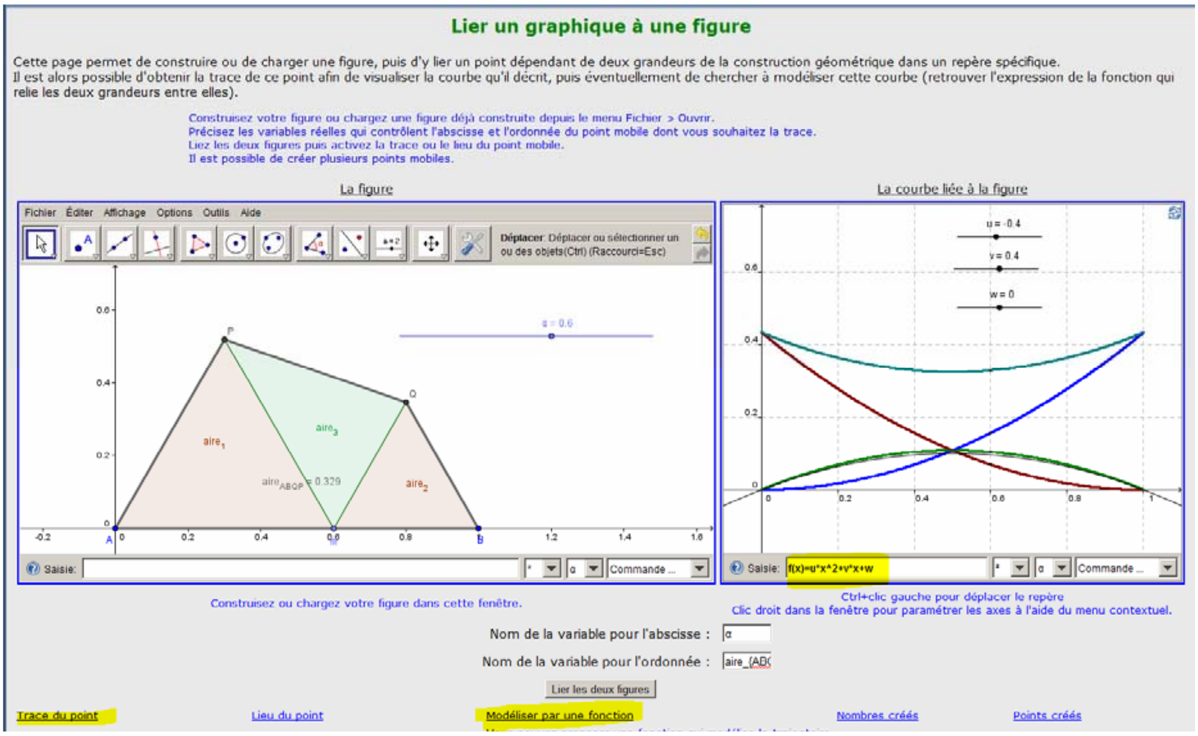
1. Déterminer la position de M qui rend maximale l’aire du triangle MPQ.
2. Expliquer pourquoi cette position rend minimale l’aire du quadrilatère ABQP.

Consignes données aux élèves par l’enseignant pour chaque séance :

« Voici la production qu’un élève de ma classe de l’année dernière a proposée pour répondre à l’exercice. Cette production est accompagnée de quelques questions auxquelles vous répondrez après avoir analysé la démarche suivie. Quelques éléments ont été volontairement cachés.
Il est conseillé de décrire les pistes suivies au cours de votre recherche, ainsi que les difficultés rencontrées. »

Séance 1 : analyse de la production de Youssra

J’ai utilisé GéoGébra plus précisément la page « Lier un graphique à une figure » disponible sur le Web à l’adresse
www.geogebra.org/en/upload/files/french/doNuts/LierUneCourbe.htm#ici1
J’ai représenté graphiquement les aires des polygones AMP, MBQ, MQP et APQB.



Il est facile de constater que l’aire du triangle MPQ est maximale quand « texte caché » *et on voit bien que l’aire du polygone ABQP est alors minimale.*

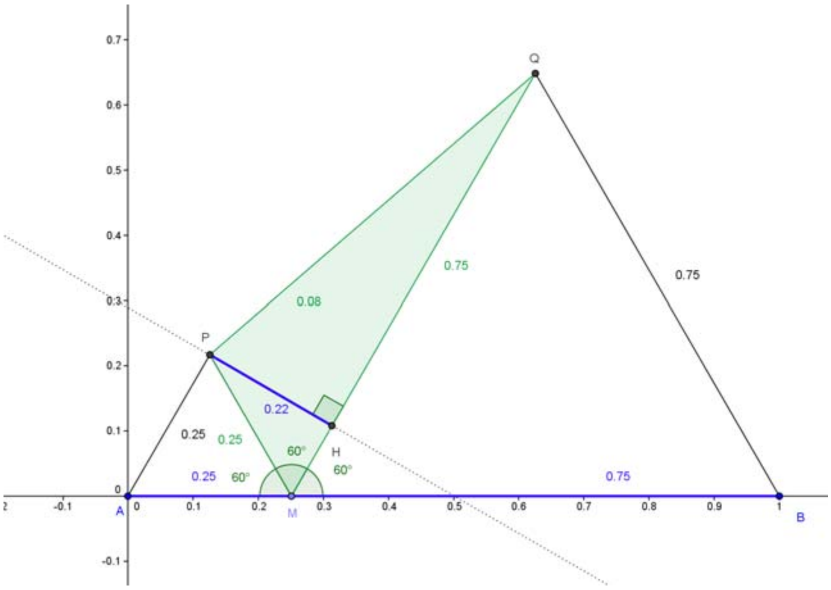
- Compléter la copie d'écran de Youssra par une légende associant courbes et aires.
- Retrouver le « texte caché » de la rédaction de Youssra.

Pour aller plus loin, j'ai pensé utiliser une fonction polynôme de degré 2 pour modéliser la courbe verte qui ressemble à un morceau de parabole. J'ai tâtonné avec trois curseurs, je suis certaine que w=0, et que u et v sont opposés. Mais ça ne marche pas, je n'ai pas réussi à superposer les courbes !

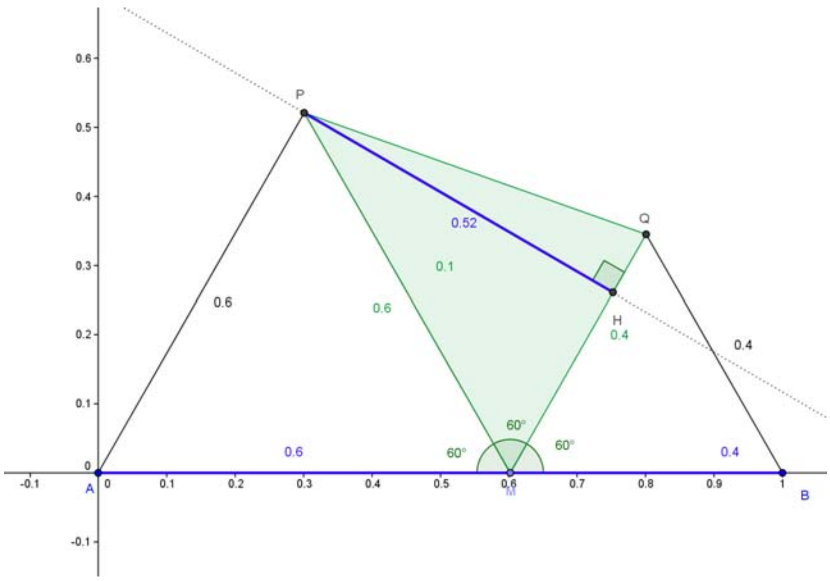
- Expliquer pourquoi w=0.
- Expliquer pourquoi u et v sont opposés.

<u>Séance 2 : analyse de la production de Mylène</u>

Pour comprendre le problème qui me semblait compliqué, j'ai d'abord utilisé GéoGébra pour faire une figure.



Ici l'aire du triangle MPQ est égale à 0,08.



Ici l'aire du triangle MPQ est égale à 0,1.

<u>Première question du sujet.</u>

J'ai calculé, dans le cas général, la hauteur PH en posant x=AM.

Puis j'ai obtenu l'aire du triangle MPQ : $0{,}4x \times (1 - x) = 0{,}4x - 0{,}4x^2$

- Critiquer le résultat énoncé par Mylène :
  « l'aire du triangle MPQ est égale à $0{,}4x \times (1 - x) = 0{,}4x - 0{,}4x^2$ ».

Ensuite, j'ai tracé la courbe avec ma calculatrice et j'ai trouvé 0,5.

Graphique caché

En conclusion, l'aire du triangle MPQ est maximale pour $x = 0{,}5$ autrement dit quand M est au milieu de [AB].

- Comme l'a fait Mylène, utiliser la calculatrice pour visualiser la courbe associée à l'aire du triangle MPQ et commenter le résultat énoncé par Mylène.

Seconde question du sujet.

En additionnant les aires, j'ai trouvé :

Aire(APQB) = « texte caché » + $(0{,}4x - 0{,}4x^2) + 0{,}4(1-x)^2$.

En développant : Aire(APQB)= $0{,}4x^2$ + « texte caché ».

J'ai tracé la courbe avec ma calculatrice et j'ai trouvé 0,5.

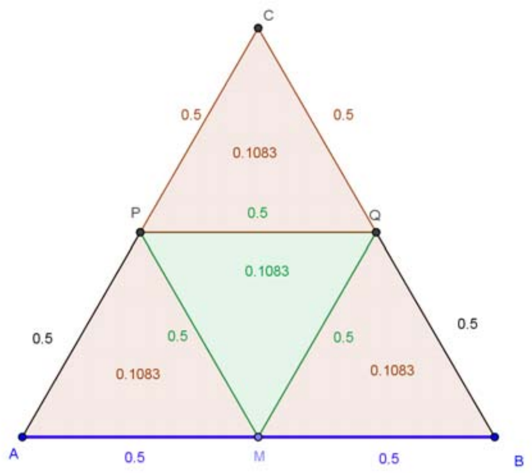
Graphique caché

En conclusion, l'aire du quadrilatère APQB est minimale pour $x = 0{,}5$ autrement dit quand M est au milieu de [AB].

- Au cours de sa résolution, Mylène utilise une approximation de $\frac{\sqrt{3}}{4}$. Quelle est cette approximation ?
- En utilisant l'approximation de Mylène, retrouver les textes cachés en exprimant l'aire du triangle AMP en fonction de x puis celle du quadrilatère APQB.
- Comme l'a fait Mylène, utiliser la calculatrice pour visualiser la courbe associée à l'aire du quadrilatère APQB et commenter le résultat énoncé par Mylène.

Séance 3 : analyse de la production de Julie

J'ai fait la figure (cf. annexe 1) et placé M au milieu de [AB], j'ai alors remarqué que les trois triangles sont superposables, j'ai pensé à Thalès et complété la figure pour obtenir le triangle ABC.
Dans le formulaire du livre, j'ai trouvé une formule pour l'aire d'un triangle équilatéral, ici de côté 1 donc l'aire est égale à $\frac{\sqrt{3}}{4}$. J'en déduis que l'aire du triangle MPQ est égale à $\frac{\sqrt{3}}{16}$ et que l'aire du trapèze ABQP est égale à $\frac{3\sqrt{3}}{16}$.



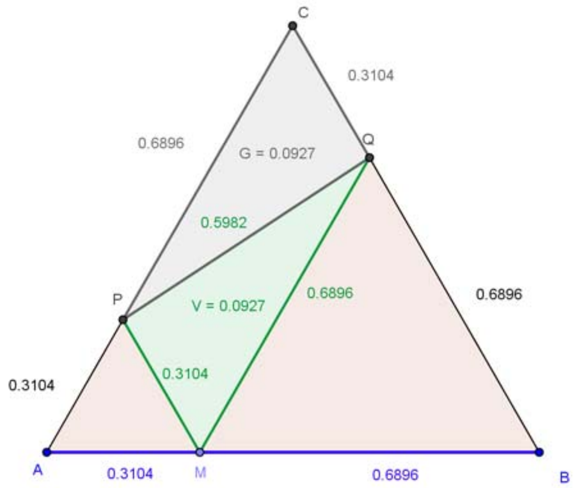
Annexe 1

Dans le cas général, l'aire du triangle équilatéral AMP est égale à $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ *, celle de BMQ est égale à* $\frac{\sqrt{3}}{4}(1-x)^2$ *, V=G donc par découpage, cf. annexe 2, j'obtiens :*

$$2\times V = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}(1-x)^2$$

D'où $V = \frac{\sqrt{3}}{4}(x - x^2)$

Après, j'ai voulu comparer V à $\frac{\sqrt{3}}{16}$ *mais je n'ai pas réussi. J'ai donc décidé d'abandonner la méthode … Mais je suis certaine de ma conjecture : le minimum de l'une et le maximum de l'autre sont bien obtenus simultanément au milieu de [AB]. D'ailleurs je l'ai vérifié en traçant les courbes sur papier millimétré (cf. annexe 3).*



Annexe 2

- Julie utilise, sans le justifier, l'égalité $V = G$. Par un raisonnement géométrique, compléter l'exposé de Julie, en démontrant l'égalité des aires des triangles CPQ et MPQ.
- Réaliser l'annexe 3 évoquée par Julie.
- Pour x appartenant à l'intervalle [0 ; 1], on pose $V(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(x - x^2\right)$.
- Vérifier que $V\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{16}$.
- En étudiant le signe de $V(x) - V\left(\frac{1}{2}\right)$, démontrer le résultat relatif à l'aire du triangle MPQ.
- Sans aucun calcul, justifier la dernière intuition de Julie : « le minimum de l'une et le maximum de l'autre sont bien obtenus simultanément ».

<u>Séance 4 : analyse de la production d'Alexis</u>

Comme je ne trouvais rien malgré tout le temps qui passait, j'ai cherché « aire d'un triangle » sur « Wikipédia » et j'ai trouvé trois formules :

- *l'une utilise base et hauteur mais je ne connais pas la hauteur du triangle PQM alors je l'ai éliminé ;*
- *l'autre la formule du Héron mais il faut connaître les trois côtés et je n'en connais que deux ;*
- *donc je me suis permis d'utiliser la troisième* **S** = $\frac{1}{2}ab\sin\gamma$.

En admettant ce résultat, je trouve facilement les aires des trois triangles et du quadrilatère :

- *pour APM, je trouve* $\mathbf{S_1}$ = « texte caché » ;
- *pour BMQ, je trouve* $\mathbf{S_2}$ = « texte caché » ;
- *pour MPQ, je trouve* $\mathbf{S_3}$ = $\frac{1}{2}x(1-x)\sin(60)$;
- *pour APQB, je trouve* $\mathbf{S_4}$ = « texte caché » = $\frac{1}{2}\sin(60)\times(x^2-x+1)$.

Étude de S_3.

a) *Sens de variation.*

Comme $\sin(60)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ *, alors* $\frac{1}{2}x(1-x)\sin(60)=\frac{\sqrt{3}}{4}(x-x^2)=\frac{\sqrt{3}}{4}x-\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ *c'est un polynôme du second degré donc sa courbe est une parabole* (Γ_3) *ici tournée vers le bas car* $a=-\frac{\sqrt{3}}{4}<0$.

b) *Coordonnées du sommet de* (Γ_3)

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\times 0-\frac{\sqrt{3}}{4}\times 0^2=0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\times 1-\frac{\sqrt{3}}{4}\times 1^2=0$$

le polynôme s'annule en 0 et en 1 donc $x_S=\frac{0+1}{2}=0,5$ *et* $y_S=f(x_S)=f(0,5)=\frac{\sqrt{3}}{16}$.

- Utiliser les informations données par Alexis (cf. a) et b)) pour dresser le tableau de variation de la fonction f_3 définie sur [0 ; 1] par $f_3(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}(x-x^2)$.

Étude de S_4.

« texte caché »

- Exprimer S1 et S2 en fonction de x. En déduire que $\mathbf{S_4}=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2-\frac{\sqrt{3}}{4}x+\frac{\sqrt{3}}{4}$.
- On note f_4 la fonction définie sur [0 ;1] par $f_4(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2-\frac{\sqrt{3}}{4}x+\frac{\sqrt{3}}{4}$ et de courbe représentative (Γ_4). Trouver, dans l'intervalle [0 ; 1], deux nombres x_1 et x_2 et ayant la même image par f_4. En déduire le sommet de (Γ_4) et le tableau de variation de f_4.

Séance 5 : analyse de la production de Paul Alexandre

Comme je connais assez bien XCas (surtout l'instruction canonical_form() que j'ai utilisée l'année dernière), j'ai préféré utiliser XCas.

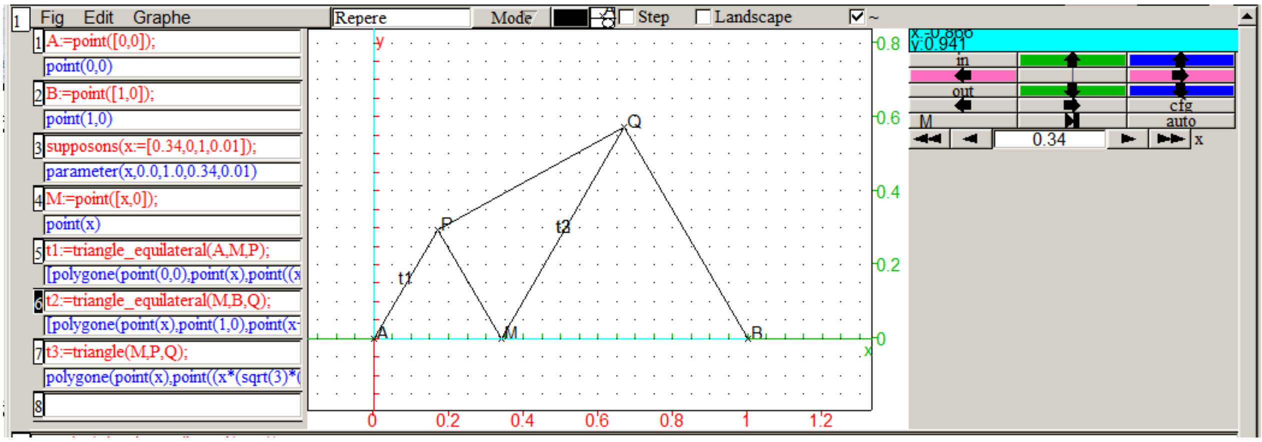
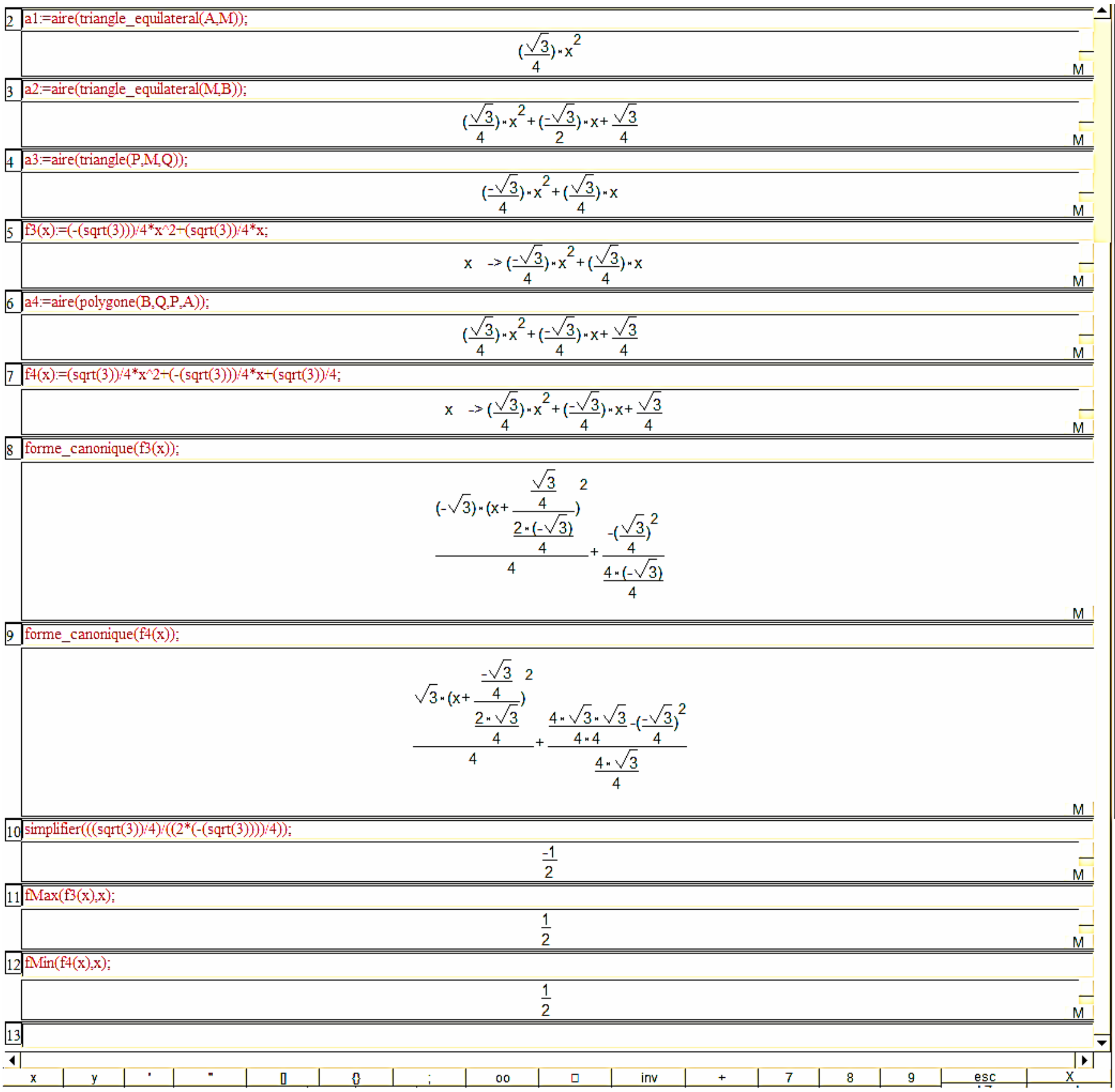


Fig Edit Graphe
Repere
Mode
Step
Landscape
A:=point([0,0]);
point(0,0)
B:=point([1,0]);
point(1,0)
supposons(x:=[0.34,0,1,0.01]);
parameter(x,0.0,1.0,0.34,0.01)
M:=point([x,0]);
point(x)
t1:=triangle_equilateral(A,M,P);
t2:=triangle_equilateral(M,B,Q);
t3:=triangle(M,P,Q);
0.34


a1:=aire(triangle_equilateral(A,M));
$\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot x^2$
a2:=aire(triangle_equilateral(M,B));
$(\frac{\sqrt{3}}{4})\cdot x^2+(\frac{-\sqrt{3}}{2})\cdot x+\frac{\sqrt{3}}{4}$
a3:=aire(triangle(P,M,Q));
$(\frac{-\sqrt{3}}{4})\cdot x^2+(\frac{\sqrt{3}}{4})\cdot x$
f3(x):=(-(sqrt(3)))/4*x^2+(sqrt(3))/4*x;
$x \to (\frac{-\sqrt{3}}{4})\cdot x^2+(\frac{\sqrt{3}}{4})\cdot x$
a4:=aire(polygone(B,Q,P,A));
$(\frac{\sqrt{3}}{4})\cdot x^2+(\frac{-\sqrt{3}}{4})\cdot x+\frac{\sqrt{3}}{4}$
f4(x):=(sqrt(3))/4*x^2+(-(sqrt(3)))/4*x+(sqrt(3))/4;
$x \to (\frac{\sqrt{3}}{4})\cdot x^2+(\frac{-\sqrt{3}}{4})\cdot x+\frac{\sqrt{3}}{4}$
forme_canonique(f3(x));
forme_canonique(f4(x));
simplifier(((sqrt(3))/4)/((2*(-(sqrt(3))))/4));
$\frac{-1}{2}$
fMax(f3(x),x);
$\frac{1}{2}$
fMin(f4(x),x);
$\frac{1}{2}$

Commentaires

$\boxed{2}$ on retrouve la formule de l'aire d'un triangle équilatéral.

$\boxed{4}$ on reconnait un polynôme du second degré

$$a \leftarrow -\frac{\sqrt{3}}{4}\ ;\ b \leftarrow \frac{\sqrt{3}}{4}\ ;\ c \leftarrow 0$$

$\boxed{6}$ $\boxed{7}$ f_4 aussi est un polynôme du second degré

$$a \leftarrow \frac{\sqrt{3}}{4}\ ;\ b \leftarrow -\frac{\sqrt{3}}{4}\ ;\ c \leftarrow \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Les paraboles sont tournées dans des sens opposés.

$\boxed{8}$ Le résultat est monstrueux, je n'ai pas réussi à faire mieux, ça tourne en rond mais, on voit bien qu'on peut simplifier :

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{2 \times \frac{-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{-2 \times \frac{\sqrt{3}}{4}} = -\frac{1}{2} \quad \text{cf. } \boxed{10}$$

et

$$\frac{-\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2}{\frac{\cancel{4} \times (-\sqrt{3})}{\cancel{4}}} = +\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{16}$$

En résumé, la forme canonique de f_3 est :

$$f_3(x) = -\frac{\sqrt{3}}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{16} \text{ donc,}$$

$$f_3(x) \leqslant f_3\left(\frac{1}{2}\right).$$

Le maximum de f_3 est $\frac{\sqrt{3}}{16}$ atteint en $\frac{1}{2}$.

Ce qui est confirmé à la ligne $\boxed{11}$.

- Extraire des documents livrés par Paul-Alexandre, les informations relatives à la forme canonique de f_3.
- A la manière de Paul-Alexandre, simplifier le résultat retourné ligne 9 pour en déduire la forme canonique de f_4.
- En développant, vérifier les calculs relatifs à f_4.
- Utiliser Xcas pour obtenir la forme canonique du polynôme $x^2 - x + 1$. Vérifier ce résultat en développant. En déduire son minimum et son tableau de variation.
- Recommencer avec le trinôme $- x^2 + x$.
- Critiquer la démarche de Paul-Alexandre.

Ici, j'ai remarqué quelque chose de bizarre, il faut faire attention à l'ordre des points…

13 aire(triangle(P,M,Q));

$$(\frac{-\sqrt{3}}{4})\cdot x^2+(\frac{\sqrt{3}}{4})\cdot x$$

14 aire(triangle(Q,M,P));

$$(\frac{\sqrt{3}}{4})\cdot x^2+(\frac{-\sqrt{3}}{4})\cdot x$$

15 simplifier(aire(triangle(P,M,Q))+aire(triangle(Q,M,P)));

$$0$$

16 aire(polygone(B,Q,P,A));

$$(\frac{\sqrt{3}}{4})\cdot x^2+(\frac{-\sqrt{3}}{4})\cdot x+\frac{\sqrt{3}}{4}$$

17 aire(polygone(A,P,Q,B));

$$(\frac{-\sqrt{3}}{4})\cdot x^2+(\frac{\sqrt{3}}{4})\cdot x+\frac{-\sqrt{3}}{4}$$

18 simplifier(aire(polygone(B,Q,P,A))+aire(polygone(A,P,Q,B)));

$$0$$

- Commenter cette dernière remarque de Paul-Alexandre.

Remarque :

L'analyse de la production de Paul-Alexandre est plus difficile. Elle pourra n'être proposée qu'à certains groupes, ou en accompagnement personnalisé.

<u>Évaluation des acquis des élèves.</u>

Extrait des programmes des premières S, ES et L :

Objectif général

Outre l'apport de nouvelles connaissances, le programme vise le développement des compétences suivantes :

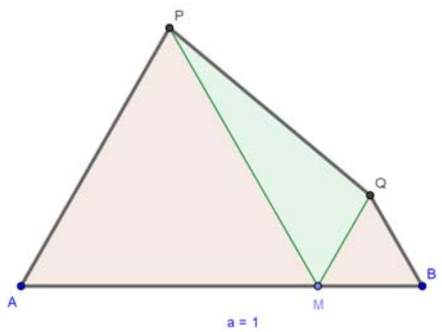
- mettre en œuvre une recherche de façon autonome ;
- mener des raisonnements ;
- avoir une attitude critique vis-à-vis des résultats obtenus ;
- communiquer à l'écrit et à l'oral.

L'évaluation proposée se déroule en deux parties. La première partie permet une évaluation de certaines compétences citées dans les programmes, en incitant l'élève à s'auto-évaluer. La deuxième partie fait le point sur les connaissances acquises par les élèves à la fin de l'activité.

Texte de l'évaluation

M est un point libre sur le segment [AB] de longueur 1, AMP et MBQ sont équilatéraux.

1. Déterminer la position de M qui rend maximale l'aire du triangle MPQ.
2. Expliquer pourquoi cette position rend minimale l'aire du quadrilatère ABQP



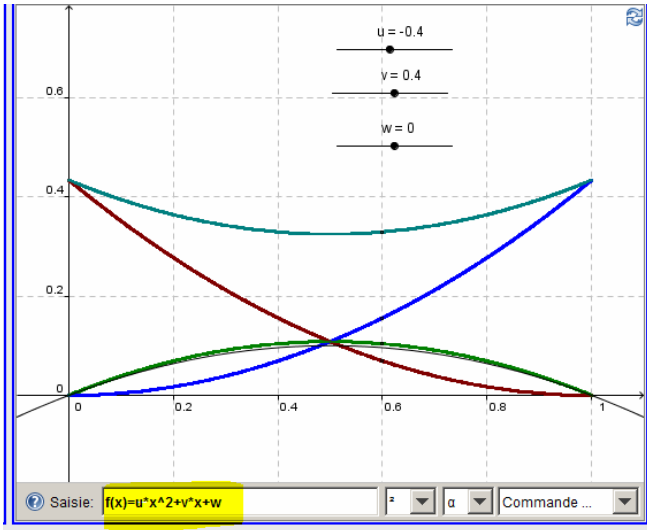
Première partie de l'évaluation (20mn – 8 points)

- En un maximum de 10 lignes, en guise de conclusion de l'étude : donner le point qui vous a semblé le plus délicat à traiter ou qui a posé le plus de difficultés ainsi que le point sur lequel vous avez le plus progressé. Justifier vos choix.

  Aucun développement mathématique n'est demandé.

- En un maximum de 15 lignes, proposer ce qui vous parait-être une démarche « idéale » de résolution du problème. On sera amené à se souvenir des points positifs et négatifs des différentes démarches des cinq élèves.

  Aucun développement mathématique n'est demandé.



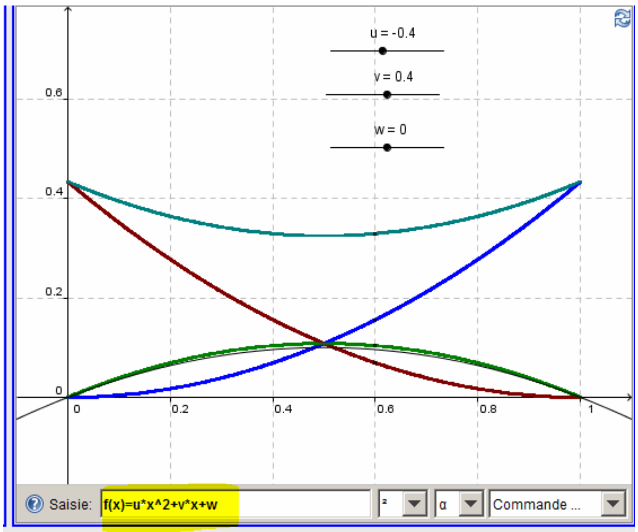
Seconde partie de l'évaluation (35 minutes - 12 points)

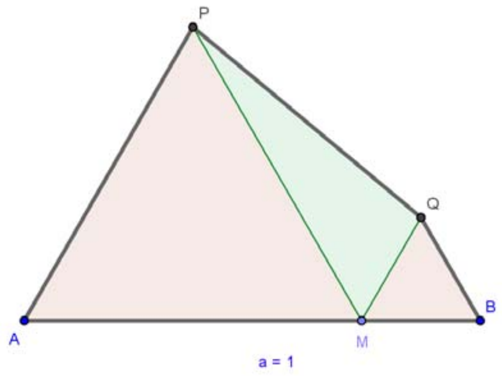
1. Associer les courbes et les aires des polygones AMP, MBQ, MQP et APQB. Découper, coller, légender. On ne demande aucune justification.
2. On pose AM=x, exprimer l'aire du triangle AMP en fonction de x. Justifier.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 1] par $f(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(x - x^2\right)$. On admet qu'une des courbes ci-contre représente cette fonction.

3. Utiliser le tableau de variation de f pour justifier le choix de la courbe associée à cette fonction.

Question de synthèse : énoncer différentes méthodes permettant de déterminer les coordonnées du sommet d'une parabole quelconque. Structurer la réponse.





Remarque :

Afin de construire rapidement le cours sur le second degré, le professeur a fait le choix de donner les figures nécessaires aux élèves.

Un prolongement possible de cette activité est la construction de la figure de l'exercice à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

Le baby-boom

Problématiques développées : P2, P3, P5 et P6.

Série : toutes séries.

Place dans la progression : après le cours sur les fonctions polynômes du second degré.

Objectifs pédagogiques	Réactiver les connaissances sur le second degré. Modéliser une situation.
Compétences	Mettre en œuvre une recherche de manière autonome. Avoir une attitude critique vis-à-vis des résultats obtenus. Communiquer à l'écrit.
Connaissances	La parabole. Statistiques.
Modalités de gestion de classe	Travail en groupes. Activité en autonomie.

Scénario pédagogique

Situation (fiche élève)

- Consignes données à l'élève :
Modéliser l'évolution des naissances lors de la période du baby-boom au Canada par une fonction polynôme du second degré.
Mesurer l'intérêt de cette modélisation par l'estimation du nombre de naissances en 1970.
Rédiger un compte-rendu de cette activité présentant conclusions et démarches.
- Supports et ressources de travail :
Tableur et/ou calculatrice.
Les données proviennent du site « CANSIM sur E-STAT ».

Années	Estimation naissances
1950	372009
1951	381092
1952	403559
1953	417884
1954	436198
1955	442937
1956	450739
1957	469093
1958	470118
1959	479275
1960	478551
1961	475700
1962	469693
1963	465767
1964	452915

Années	Estimation naissances
1965	418595
1966	387710
1967	370894
1968	372009
1969	369647
1970	371988
1971	362187
1972	347319
1973	343373
1974	350650
1975	359323
1976	359987
1977	361400
1978	358852
1979	366064

Années	Estimation naissances
1980	370709
1981	371346
1982	373082
1983	373689
1984	377031
1985	375727
1986	372913
1987	369742
1988	376795
1989	392661
1990	405486
1991	402533
1992	398643
1993	388394
1994	385114

Années	Estimation naissances
1995	378016
1996	366200
1997	348598
1998	342418
1999	337249
2000	327882
2001	333744
2002	328802
2003	335202
2004	337072
2005	342176
2006	354617
2007	367864
2008	374595
2009	380535

Aide ou « coup de pouce »

- **Vérification de la bonne compréhension :**

Pour inciter les élèves à reformuler la consigne, on pourra leur poser quelques questions :

  - Qu'est-ce que le baby-boom ? À quelle période se situe-t-il au Canada ?
  - Quel est le travail à effectuer ? Que demande-t-on de réaliser ? D'estimer ?
  - Quelles informations nous donnent les ressources proposées ?

- **Aide à la démarche de résolution :**
  - Comment peut-on afficher un nuage de points sur l'écran de la calculatrice ? À l'aide du tableur ?
  - Comment afficher à l'écran une courbe de tendance ? Comment obtenir son équation ?

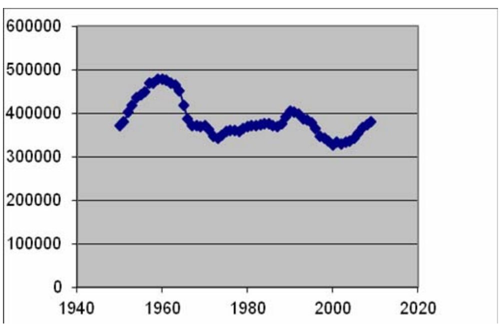
- **Apport de connaissances et de savoir-faire :**
  - Comment établir le lien entre la parabole et les coefficients a, b et c de la fonction polynôme du second degré ?

Pour aller plus loin (approfondissements et prolongements possibles) :

- Établir une étude statistique permettant de comparer les naissances au Canada et dans les pays d'Europe entre 1950 et 1968. S'appuyer sur le site de l'INSEE.
- Des phénomènes de baby-boom se retrouvent-ils sur le vieux continent ?
- Existe-t-il des périodes de l'histoire de France où l'on a pu constater des phénomènes comparables, où la courbe des naissances est modélisable par une parabole ?

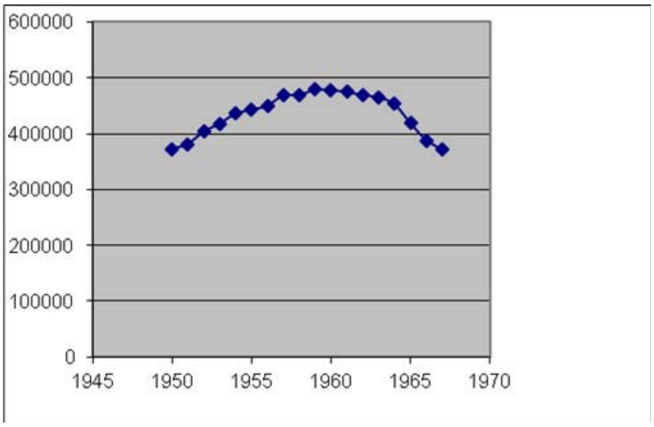
Compte-rendu des activités des élèves

Dans un premier temps, les élèves représentent le nuage de points de coordonnées (année, nombre de naissances). Le nuage obtenu est le suivant :



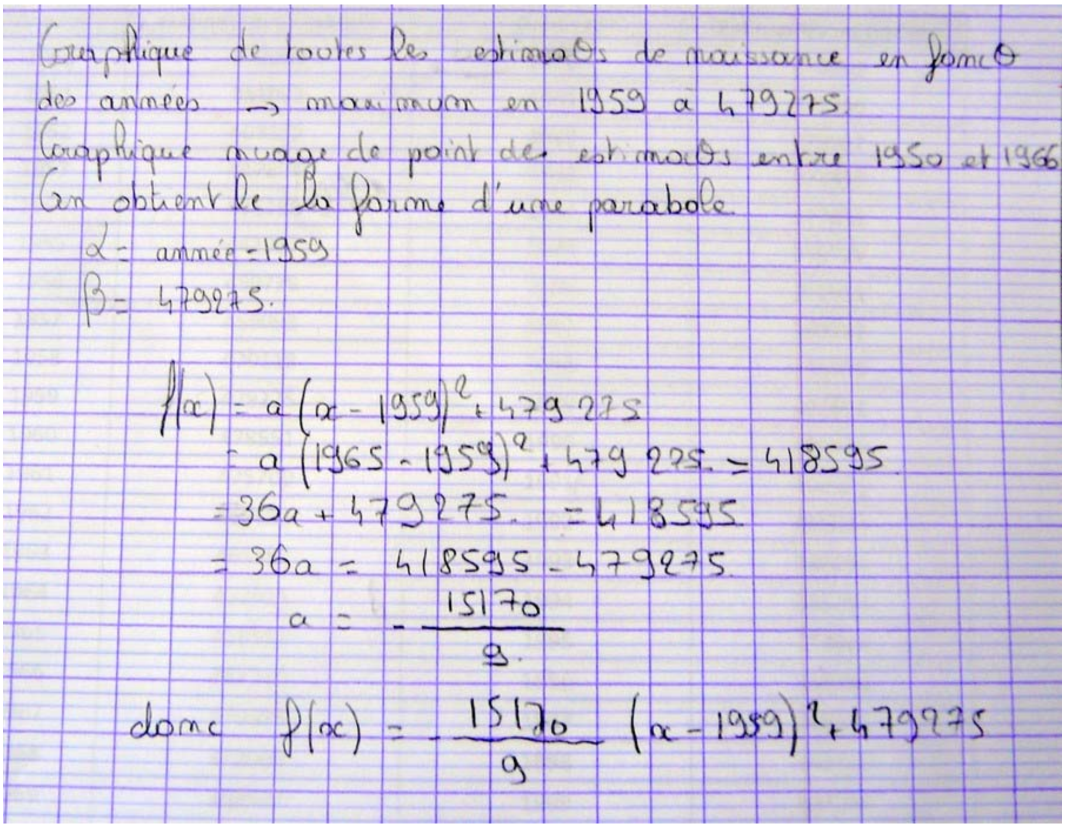
Une des élèves de la classe, Élodie, annonce : « Le baby-boom semble être situé entre 1950 et 1967 ». Elle décide donc de ne garder que les valeurs correspondantes.

Elle obtient le nuage de points suivant :



Le professeur donne la consigne de décrire les éléments de recherche qui permettent de modéliser mathématiquement cette situation.

Les élèves travaillent en autonomie. On obtient diverses productions parmi lesquelles les deux suivantes :



Graphique de toutes les estimations de naissance en fonction des années → maximum en 1959 à 479275

Graphique nuage de point des estimations entre 1950 et 1966

On obtient le la forme d'une parabole

α = année = 1959

β = 479275.

$f(x) = a(x - 1959)^2 + 479275$

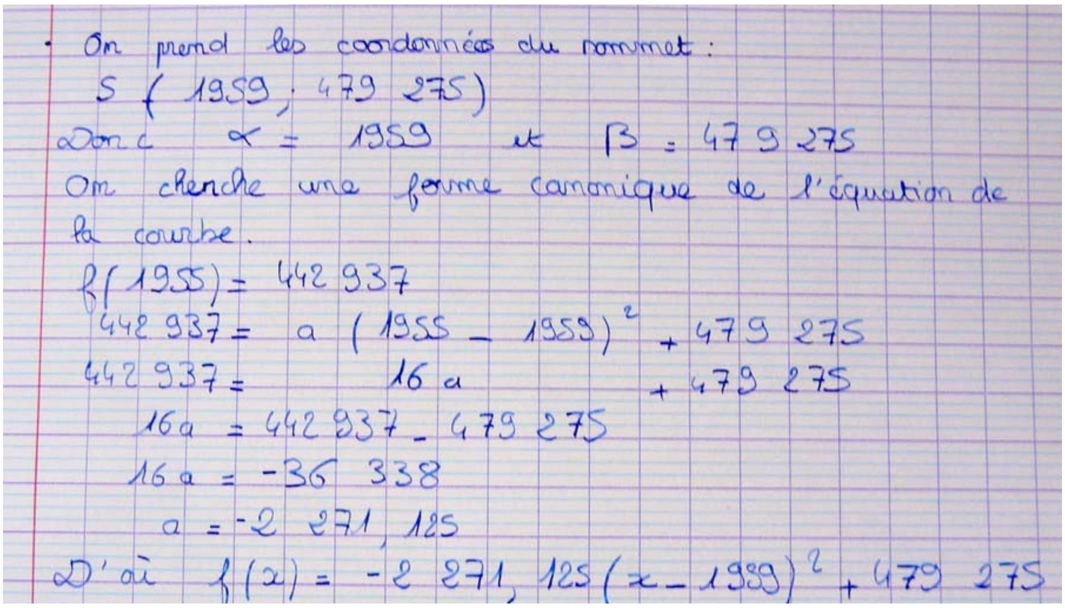
$= a(1965 - 1959)^2 + 479275 = 418595$

$= 36a + 479275 = 418595$

$= 36a = 418595 - 479275$

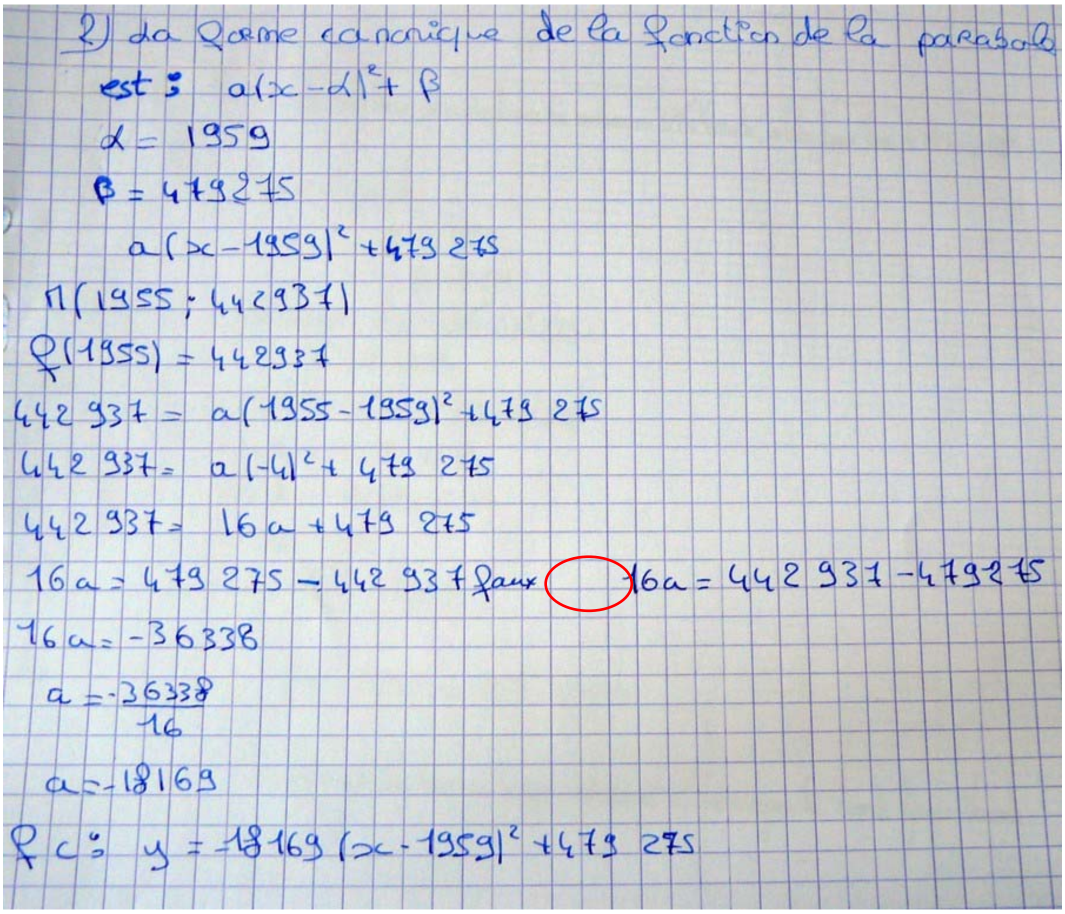
$a = -\dfrac{15170}{9}$

donc $f(x) = -\dfrac{15170}{9}(x - 1959)^2 + 479275$



Il s'ensuit un travail collectif sur la qualité de la communication écrite.

Le professeur a repéré un certain nombre d'erreurs dans la production suivante :



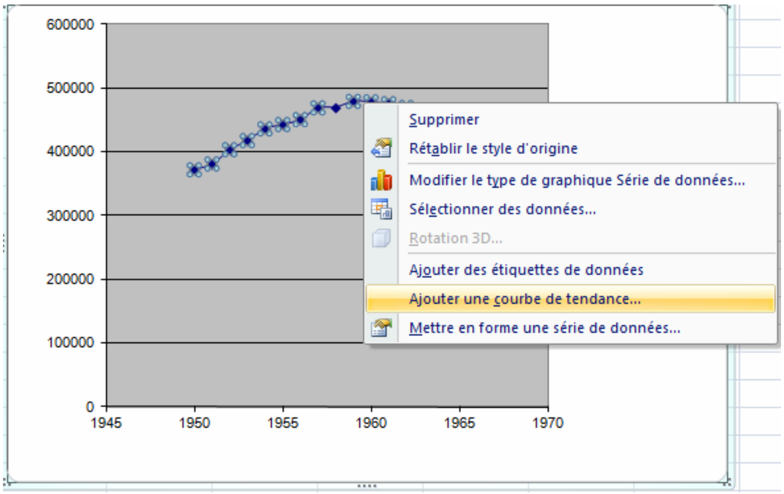
Par un questionnement ouvert, l'enseignant amène l'élève à critiquer sa production. Ce dernier constate immédiatement que le coefficient *a* est en contradiction avec l'allure de la courbe obtenue au tableur :

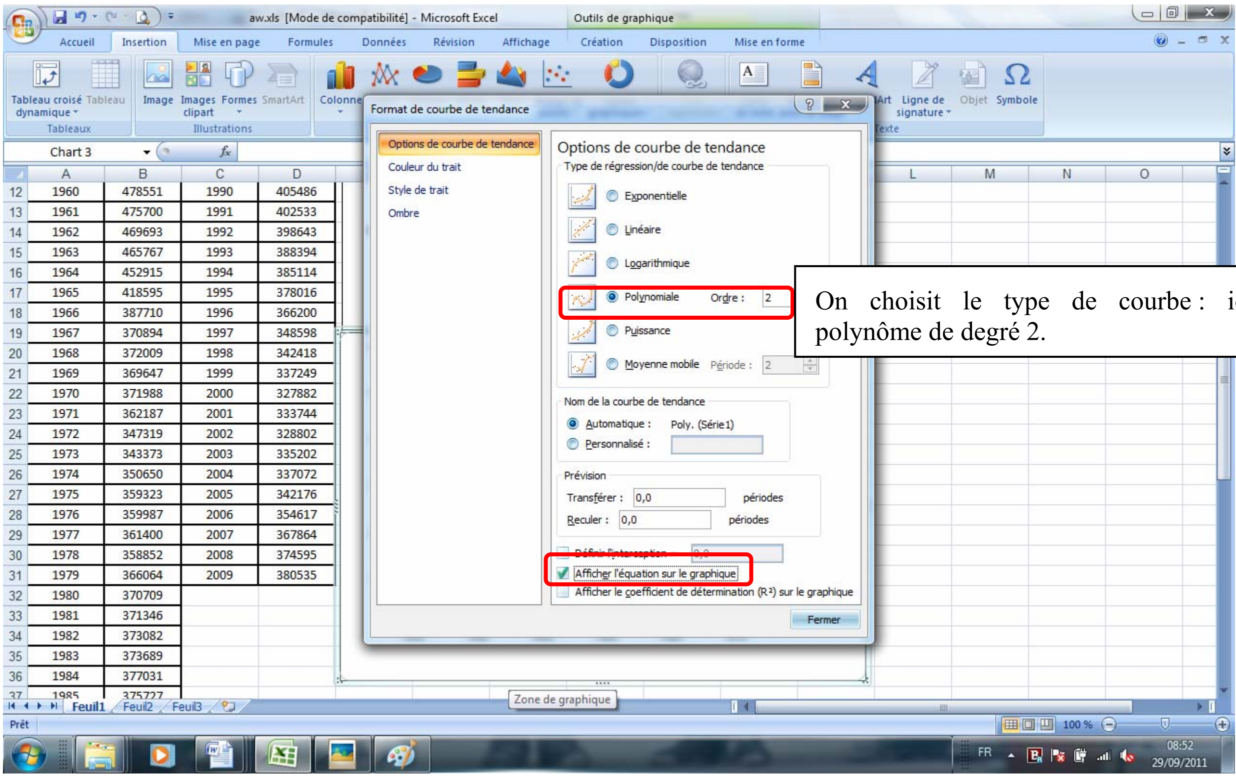
« La parabole est tournée vers le bas donc le coefficient de x² doit être négatif. Celui que j'obtiens est positif. J'ai fait une erreur de signe ».

L'élève rectifie mais commet maintenant une erreur de calcul suite à une mauvaise manipulation des touches de la calculatrice. C'est l'occasion pour le professeur de travailler l'ordre de grandeur et le calcul mental réfléchi (Quel est le rapport entre 36000 et 18000 ? Comment diviser mentalement par 16 ?...).

Un temps d'échange collectif amène le professeur à présenter une nouvelle fonctionnalité du tableur : la courbe de tendance.

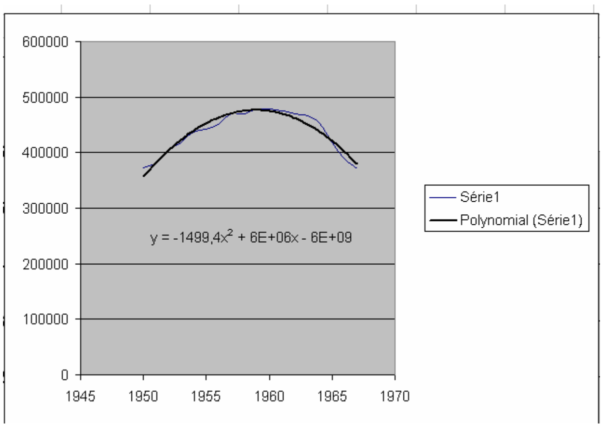
À l'aide d'un clic droit, on fait apparaître :





On choisit le type de courbe : ici polynôme de degré 2.

On obtient la courbe suivante :



Question du professeur : « Comment comparer l'équation de la parabole que vous avez déterminée avec celle obtenue à l'aide du tableur ? »

Traduction de l'équation :

- $y = -1499{,}4x^2 + 6E+06x - 6E+09.$

$y = -1499{,}4x^2 + 6\,000\,000x - 6\,000\,000\,000$

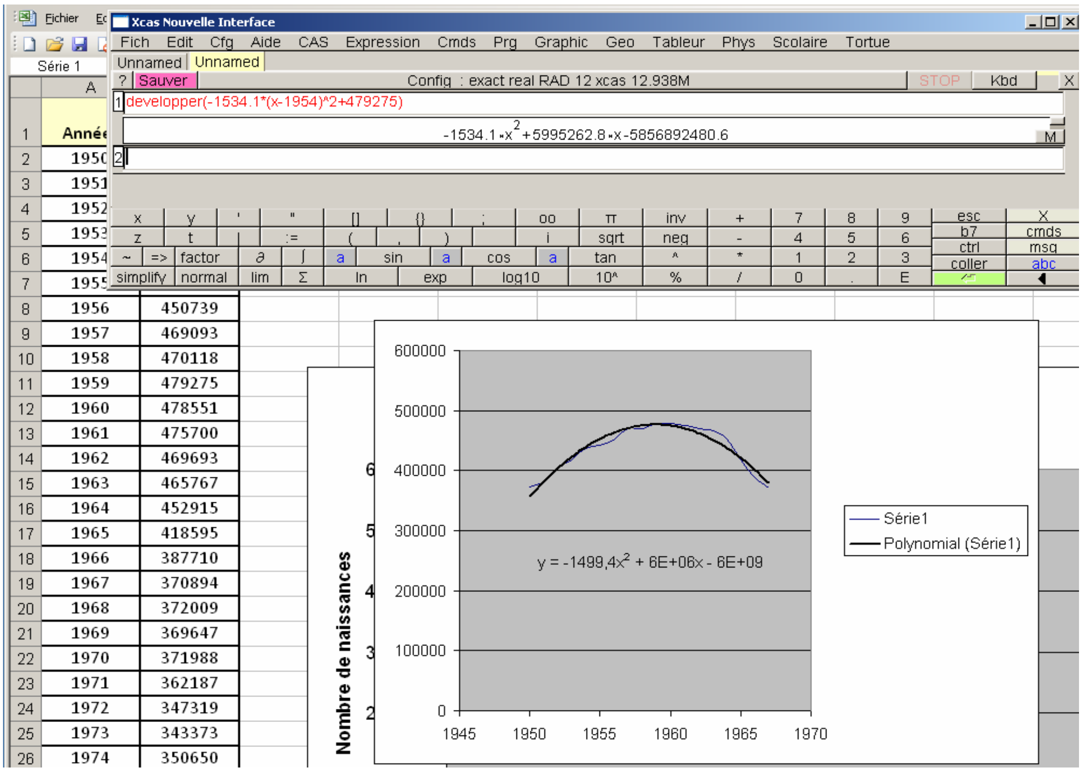
Une autre rédaction :

D'où $f(x) = -2\,271{,}125(x - 1959)^2 + 479\,275$

Avec xcas $f(x) = -2271{,}125x^2 + 8898267{,}75x$ ...

$- 8715373986{,}12$

Une comparaison visualisée sur une réponse d'élève :



Pour aller plus loin…

« Comparer les résultats obtenus pour l'évaluation du nombre de naissances à l'aide des deux modélisations ».

Une histoire de paraboles

Problématiques développées : P2, P3, P5 et P6.
Série : S.
Place dans la progression : après le cours sur les fonctions polynômes du second degré.

Objectifs pédagogiques	Résoudre un problème traitant du second degré avec les TICE.
Compétences	Mettre en œuvre une recherche de manière autonome. Avoir une attitude critique vis-à-vis des résultats obtenus. Communiquer à l'oral.
Connaissances	La parabole.
Logiciels	Logiciel de géométrie dynamique. Tableur.
Modalités de gestion de classe	Activité en autonomie. Travaux pratiques.

Fiche élève : trajectoire du sommet d'une parabole

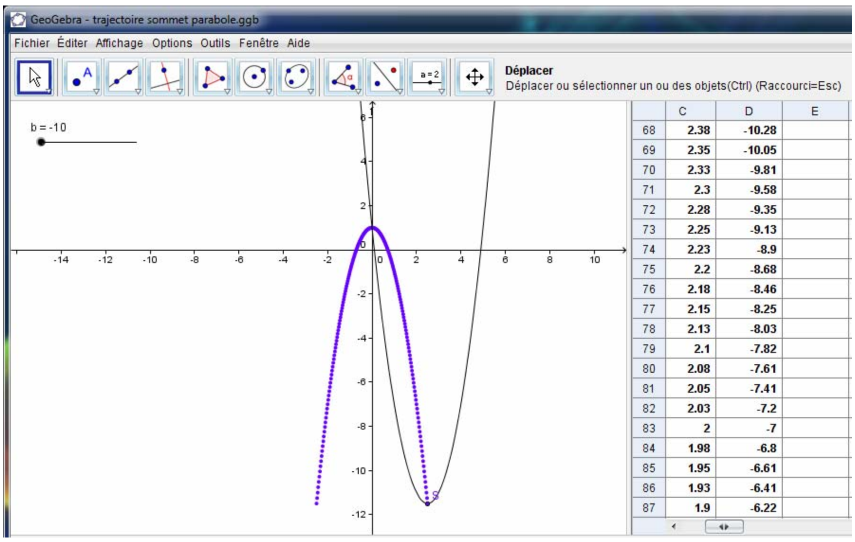
Consignes données à l'élève : traiter le TP en respectant les appels au professeur.

L'objet de ce TP est de conjecturer le lieu du sommet S de la parabole ($\mathscr{P}$) d'équation $y = 2x^2 + bx + 1$ où b est un nombre réel.
Réaliser la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
Appeler le professeur pour valider la construction.
En faisant varier b, observer les déplacements du point S et répondre au problème.
Appeler le professeur pour valider la construction.
A l'aide d'un tableur saisir les coordonnées de S lorsque b varie et conjecturer l'équation de la courbe obtenue.

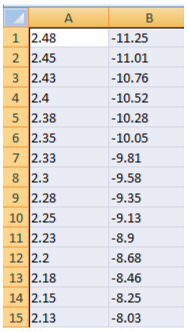
Prolongements possibles :

- Dans le cadre du TP, on peut demander à examiner le même problème avec la parabole d'équation $y = ax^2 + x + 2$ où a est un nombre réel.
- Dans le cadre d'un devoir en temps libre, le professeur demande de rédiger la démonstration qui permet de valider ou de rejeter la conjecture concernant le lieu du sommet S de la parabole ($\mathscr{P}$).

Éléments de réponses pour le TP :

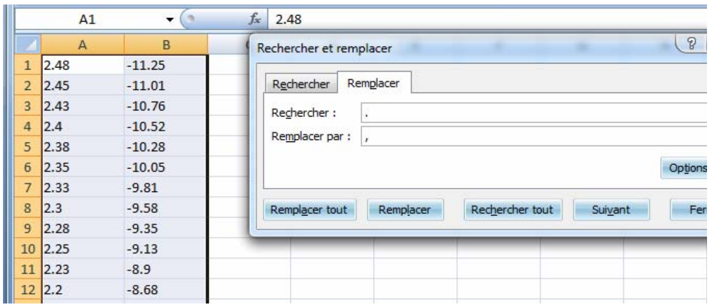


Indication :
On pensera à transformer les formats d'écriture des nombres extraits du tableur-*GeoGebra* par la fonction : Ctrl + F (passage du point au point décimal ou virgule)



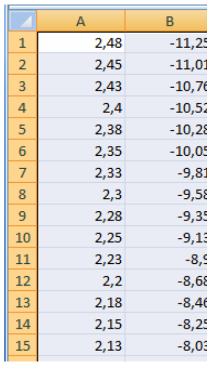
	A	B
1	2.48	-11.25
2	2.45	-11.01
3	2.43	-10.76
4	2.4	-10.52
5	2.38	-10.28
6	2.35	-10.05
7	2.33	-9.81
8	2.3	-9.58
9	2.28	-9.35
10	2.25	-9.13
11	2.23	-8.9
12	2.2	-8.68
13	2.18	-8.46
14	2.15	-8.25
15	2.13	-8.03

Ctrl+
F



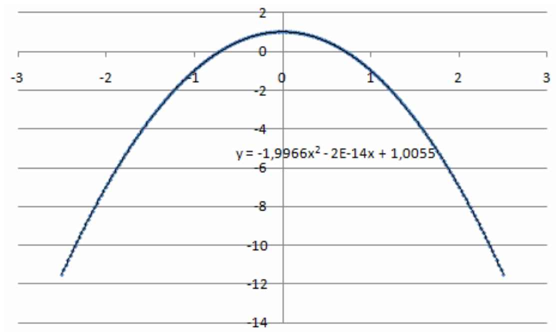
A1 f_x 2.48

	A	B
1	2.48	-11.25
2	2.45	-11.01
3	2.43	-10.76
4	2.4	-10.52
5	2.38	-10.28
6	2.35	-10.05
7	2.33	-9.81
8	2.3	-9.58
9	2.28	-9.35
10	2.25	-9.13
11	2.23	-8.9
12	2.2	-8.68

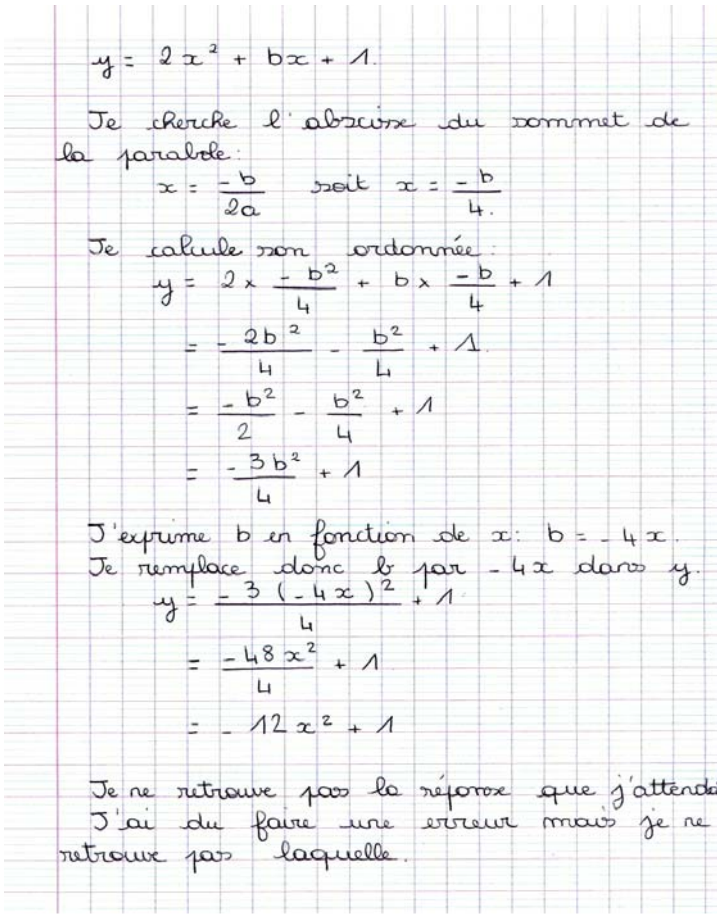


	A	B
1	2,48	-11,25
2	2,45	-11,01
3	2,43	-10,76
4	2,4	-10,52
5	2,38	-10,28
6	2,35	-10,05
7	2,33	-9,81
8	2,3	-9,58
9	2,28	-9,35
10	2,25	-9,13
11	2,23	-8,9
12	2,2	-8,68
13	2,18	-8,46
14	2,15	-8,25
15	2,13	-8,03

On obtient une idée de l'équation de la trajectoire du sommet en utilisant la courbe de tendance.



<u>Une production écrite :</u>



$y = 2x^2 + bx + 1$

Je cherche l'abscisse du sommet de la parabole :

$x = \frac{-b}{2a}$ soit $x = \frac{-b}{4}$.

Je calcule son ordonnée :

$y = 2 \times \frac{-b^2}{4} + b \times \frac{-b}{4} + 1$

$= -\frac{2b^2}{4} - \frac{b^2}{4} + 1$

$= \frac{-b^2}{2} - \frac{b^2}{4} + 1$

$= \frac{-3b^2}{4} + 1$

J'exprime b en fonction de x : $b = -4x$.
Je remplace donc b par $-4x$ dans y.

$y = \frac{-3(-4x)^2}{4} + 1$

$= \frac{-48x^2}{4} + 1$

$= -12x^2 + 1$

Je ne retrouve pas la réponse que j'attends. J'ai du faire une erreur mais je ne retrouve pas laquelle.

Commentaires :
L'élève s'engage dans un raisonnement correct, il fait preuve d'esprit critique, sa communication écrite est bonne. Lors de ce travail, il atteste les compétences C2, C3 et C4a explicitées ci-après.

<u>Exemple de grilles de compétences :</u>

Ces grilles permettent une traçabilité dans l'acquisition des compétences repérées.

Grille de compétences à l'usage de l'élève :

<table>
<tr><td colspan="3">NOM Prénom</td><td colspan="3">Classe Trimestre</td></tr>
<tr><td colspan="8">Grille de compétences : résoudre des problèmes, pratiquer une démarche scientifique</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>DS1</td><td>DS2</td><td>DS3</td><td>TP1</td><td>TP2</td><td>TP3</td></tr>
<tr><td>C1</td><td>Mettre en œuvre une recherche de façon autonome</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>C2</td><td>Mener des raisonnements</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>C3</td><td>Avoir une attitude critique face aux résultats</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>C4a</td><td>Communiquer à l'écrit</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>C4b</td><td>Communiquer à l'oral</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Grille à l'usage du professeur :

<table>
<tr><td rowspan="3"></td><td colspan="5">Résoudre des problèmes, pratiquer une démarche scientifique</td></tr>
<tr><td>C1</td><td>C2</td><td>C3</td><td>C4a</td><td>C4b</td></tr>
<tr><td>Mettre en œuvre une recherche de manière autonome</td><td>Mener des raisonnements</td><td>Avoir une attitude critique face aux résultats obtenus</td><td>Communiquer à l'écrit</td><td>Communiquer à l'oral</td></tr>
<tr><td>Nom Prénom</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Exemple d'activité dans le cadre de l'accompagnement personnalisé.

Problématiques développées : P2, P3, P4, P5 et P6.
Série : série S, adaptable aux autres séries.
Place dans la progression : après le cours sur les fonctions polynômes du second degré.

Scénario pédagogique : une évaluation diagnostique réalisée en cours de Mathématiques suivie d'une séance développée dans le cadre de l'Accompagnement Personnalisé. Une séance portant sur la démarche d'investigation, réalisée en cours de Mathématiques, boucle le scénario pédagogique.

L'une des finalités de l'Accompagnement Personnalisé, en classe de première, est de favoriser l'acquisition de compétences propres à chaque voie de formation. De ce fait, les auteurs ont souhaité présenter un scénario pédagogique permettant de développer chez les apprenants des compétences scientifiques tout en répondant spécifiquement aux besoins de chacun. L'évaluation diagnostique est ainsi au cœur de ce protocole, elle pilote l'Accompagnement Personnalisé.

Afin de préparer une séance sur la démarche d'investigation, les professeurs se sont intéressés à l'acquisition de connaissances structurées par les élèves :

L'élève sait-il :

- mobiliser ses connaissances (donner du sens, traduire, décoder, mettre en relation, choisir une propriété, appliquer une méthode…) ;
- utiliser les TIC ;
- raisonner ;
- démontrer ;
- avoir une attitude critique vis-à-vis des résultats obtenus ;
- communiquer un résultat par écrit ?

Voici l'énoncé de l'évaluation :

Après plusieurs relevés, un scientifique a modélisé une passe de volley-ball, la passe de Clément à son coéquipier Florian. La hauteur du ballon $h(t)$ en fonction du temps t est : $h(t) = -0{,}525t^2 + 2{,}1t + 1{,}9$ où $h(t)$ est exprimée en mètres et t en secondes.

a) À quelle hauteur Clément commence-t-il sa passe ?

b) Quelle hauteur maximale le ballon atteint-il ?

c) Florian ne réussit pas à toucher le ballon que Clément lui passe. Combien de temps après la passe de Clément le ballon tombe-t-il au sol ?

d) Durant combien de temps le ballon est-il en phase de descente ?

La hauteur du filet est de 2,43 mètres. Durant combien de temps le ballon est-il situé au-dessus du filet ?

Les réponses sont à justifier.

L'évaluation a débouché sur la formation de trois groupes de besoins en fonction des profils repérés.

Le premier groupe

Les élèves de ce groupe s'engagent, ont des connaissances, parfois confuses, peu structurées. Ils éprouvent des difficultés à reconnaître dans un problème simple l'outil mathématique adéquat. Ils montrent des acquis dans l'utilisation des calculatrices. Ils attestent d'un regard critique intéressant et communiquent correctement à l'écrit.

Voici quelques extraits significatifs d'une copie d'un élève de ce groupe.

Extrait 1

a) $h(t) = -0{,}525t^2 + 2{,}1t + 1{,}9$
h la hauteur en m.
t le temps en s
on cherche la hauteur tel que le temps t=0
on pose $h(0) = -0{,}525 \times 0^2 + 2{,}1 \times 0 + 1{,}9$
$= 1{,}9$
ainsi Clément commence sa passe à 1,9 m donc
$u_0 = 1{,}9$m
2) On cherche a quelle hauteur maximale le ballon atteint-il.
on pose $U_n = -0{,}525n^2 + 2{,}1n + 1{,}9$
on utilise le mode recur de la calculatrice.
on visualise les premiers termes suivant :
$u_0 = 1{,}9$
$u_1 = 3{,}475$
$u_2 = 4$ — il semble que $u_2 = 4$ soit le maximum de cette fonction.
$u_3 = 3{,}475$
$u_4 = 1{,}9.$ — il semblerait donc que la hauteur maximale est 4 m.
On cherche a justifier cette hypothèse.

Extrait 2

il s'agit donc bien d'une fonction polynome du second degré
on cherche a étudier le tableau de variation de cette fonction.
on pose $\Delta = a\,b^2 - 4ac$
$= -0{,}525 \times (2{,}1)^2 - 4 \times (-0{,}525) \times 1{,}9$
$= 1{,}67475 > 0$

Extrait 3

Je n'arrive à rien d'interressant avec mes resultats
je repars sur la forme.
$U_n = -0{,}525n^2 + 2{,}1n + 1{,}9.$
jesais donc grâce au mode recur que le max est atteint au rang 2.

on pose : $U_2 = -0{,}525 \times 2^2 + 2{,}1 \times 2 + 1{,}9.$
$= 4$

ainsi la hauteur max est 4 m.

Le deuxième groupe

Les élèves de ce groupe comprennent et interprètent correctement la situation. Ils utilisent à bon escient des connaissances mathématiques et la calculatrice.Ils ne justifient pas les résultats.

Voici un extrait de copie.

a) On remplace t par 1. On cherche la hauteur des mains de Clément

$-0,525 \times 1^2 + 2,1 \times 1 + 1,9 = 3,475$.

$-0,525 \times 0^2 + 2,1 \times 0 + 1,9 = 1,9$.

On rentre cette fonction dans la Table des fonctions sur la calculatrice et on observe que lors de la passe de Clément il se trouve à 1,9 m du sol.

b) Le ballon atteint son point culminant à 2 seconde à la hauteur de 4 mètres.

c) $F(4) = 1,9$ m donc à $F(5) = 0$.

d) Le ballon est au plus haut à 2 secondes à 4 mètres $5 - 2 = 3$

Le ballon touche le sol à 5 secondes donc il est en descente à partir de la 2ième seconde.

e) Si le filet est à 2,43 mètres dans le tableau des fonctions à la seconde 1, 2 et 3 le ballon ~~le ballon se trouv~~ se trouve successive à 3,475 ; 4 ; 3,475 mètres donc il reste 3 secondes au dessus du filet.

Le troisième groupe

Les élèves de ce groupe sont en réussite globale.

Pour permettre le progrès de tous les élèves, quels que soient leurs besoins, une remédiation plus ciblée, fondée sur les points forts de chacun, est proposée en Accompagnement Personnalisé.

Le support, commun aux trois groupes, est un exercice du même type que celui proposé en évaluation diagnostique. Le travail demandé à chaque groupe est, par contre, différent.

Des chercheurs ont, en première approximation, modélisé le taux de croissance μ (par heure h^{-1}) de la bactérie Methylosinustrichosporium (*) en fonction de la température T (en degré Celsius) par :

$$\mu(T) = -6\times10^{-5}T^2 + 2,76\times10^{-3}T - 1,998\times10^{-2}.$$

Les chercheurs souhaitent connaître :

- les températures minimale et maximale en-deçà et au-delà desquelles le taux de croissance est propice au développement de la bactérie ;
- le taux de croissance maximum ;
- l'intervalle des températures pour lequel le taux de croissance augmente en fonction de la température ;
- les températures donnant un taux de croissance égal à $4,5\times10^{-3}$.

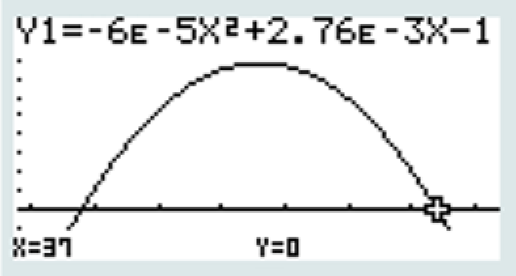
(*) Bactéries capables de croître et de se multiplier en utilisant le méthane comme seule source de carbone et d'énergie.

Pour les élèves du premier groupe : l'objectif fixé par le professeur est d'apprendre à utiliser son cours.

Pour cela, le professeur propose aux apprenants de résoudre le problème à l'aide de la leçon et de l'ébauche du travail d'un élève qu'il donne comme support, ce dernier étant reproduit ci-dessous :

Pour résoudre le problème posé, Mélanie effectue la démarche suivante :

- elle repère dans le texte les mots importants pour s'approprier la situation ;
- elle trace à l'écran de sa calculatrice la courbe représentant la fonction μ



- la parabole obtenue modélise le taux de croissance de la bactérie ;
- μ est une fonction polynôme de degré 2 ;
- elle écrit $a = \dots$, $b = \dots$ et $c = \dots$

Poursuivre le travail de Mélanie afin de répondre aux questions posées par les chercheurs.

Pour les élèves du deuxième groupe : l'objectif fixé par le professeur est d'apprendre à utiliser une fiche méthode pour apprendre à justifier.

L'activité proposée aux élèves par le professeur est la suivante :

Pour résoudre le problème posé, Charlotte utilise la fiche méthode suivante :
f est la fonction polynôme définie sur R par :
$f(x) = -6\times10^{-5}x^2 + 2,76\times10^{-3}x - 1,998\times10^{-2} = -6\times10^{-5}(x-9)(x-37) = -6\times10^{-5}(x-23)^2 + 1,176\times10^{-2}$.

- Pour résoudre l'équation $f(x) = 0$, j'utilise la forme factorisée de $f(x)$: $f(x) = -6\times10^{-5}(x-9)(x-37)$
$f(x) = 0$ équivaut à $-6\times10^{-5}(x-9)(x-37) = 0$, ce qui donne $x = 9$ ou $x = 37$.

- Pour calculer le discriminant de f, j'utilise la forme développée de f :
$f(x) = -6\times10^{-5}x^2 + 2,76\times10^{-3}x - 1,998\times10^{-2}$
$a = -6\times10^{-5}$; $b = 2,76\times10^{-3}$; $c = -1,998\times10^{-2}$
$\Delta = (2,76\times10^{-3})^2 - 4\times(-6\times10^{-5})\times(1,998\times10^{-2}) = 2,8224\times10^{-6}$

- Pour dresser le tableau de variation de f , j'utilise la forme canonique de f :
$f(x) = -6\times10^{-5}(x-23)^2 + 1,176\times10^{-2}$

x	$-\infty$	23	$+\infty$
f	↗	$1,176\times10^{-2}$	↘

Répondre aux questions suivantes en choisissant la forme de f la plus adéquate :

1. Résoudre dans **R** l'inéquation $f(x) \geq 0$.
   1.A. Démontrer que, pour tout réel x, $f(x) \leq 1{,}176\times10^{-2}$.
   1.B. Déterminer les coordonnées du sommet de la parabole qui représente f .
   1.C. Résoudre dans **R** l'équation $f(x) = 4{,}5\times10^{-3}$.
2. Répondre aux questions posées par les chercheurs.

Pour les élèves du troisième groupe : l'objectif fixé par le professeur est d'approfondir.

L'activité proposée aux élèves de ce groupe consiste à résoudre le problème à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

Pour résoudre le problème posé, Léa utilise un logiciel de calcul formel dont voici une copie d'écran :

```
1 µ(T):=-6*10^(-5)*T^2+2.76*10^(-3)*T-1.998*10^(-2)
      T -> ((-6)*10^-5)*T^2+(2.76*10^-3)*T-1.998*10^-2
2 resoudre(µ(T)=0,T)
      [9, 37]
3 simplifier(10^5*µ(T))
      -6*T^2+276.0*T-1998
4 resoudre(-6*T^2+276*T-1998>=0,T)
      [(T>=9) && (T<=37)]
5 fMax(µ(T),T)
      23
6 forme_canonique(µ(T),T)
      (-3)*(T-23.0)^2
      --------------- +0.01176
           50000
7 resoudre(µ(T)=4.5*10^(-3),T)
      [12, 34]
```

Expliquer la démarche de Léa.

<u>Bilan des travaux</u>

Les corrections et les synthèses des différentes démarches proposées à chaque groupe d'élèves sont faites en Accompagnement Personnalisé. Chaque groupe expose son travail au reste de la classe, favorisant ainsi la communication orale. Cette synthèse offre à chaque élève la possibilité de choisir l'une des démarches pour un même problème en fonction de ses compétences.

Prolongement

Afin de mettre à profit ces pistes de différenciations pédagogiques, il serait intéressant de proposer deux situations similaires aux élèves : l'une en classe, accompagnée d'un questionnement sur le choix méthodologique effectué par l'élève (qui peut être fait avant l'évaluation diagnostique) et l'autre sur l'Espace Numérique de Travail mettant en scène une situation plus complexe dans laquelle les élèves devraient mobiliser et combiner plusieurs procédures acquises. Le professeur pourrait ainsi vérifier la capacité des élèves à réinvestir ce qu'ils ont appris dans un autre cadre et selon des modalités différentes.

2. Dérivation

Lien entre coefficient directeur et pente d'une droite

Cette activité a pour but d'anticiper les difficultés, d'assurer une meilleure homogénéité des connaissances à l'approche du chapitre sur la dérivation. Elle fait suite à un repérage des besoins sur les notions d'équations de droites, de coefficient directeur, de pente.

Problématiques développées : P1, P2, P4 et P5.
Série : toutes séries.
Place dans la progression : avant le cours sur la dérivation.

Objectifs pédagogiques	Réactiver les connaissances sur les équations de droite. Donner un sens concret au coefficient directeur.
Compétences	Mettre en œuvre une recherche de façon autonome. Communiquer à l'oral.
Connaissances	Équations de droites.
Logiciels	Tableur et/ou calculatrice. Logiciel de géométrie dynamique.
Modalités de gestion de classe	Travail individuel. Accompagnement personnalisé.

Scénario pédagogique

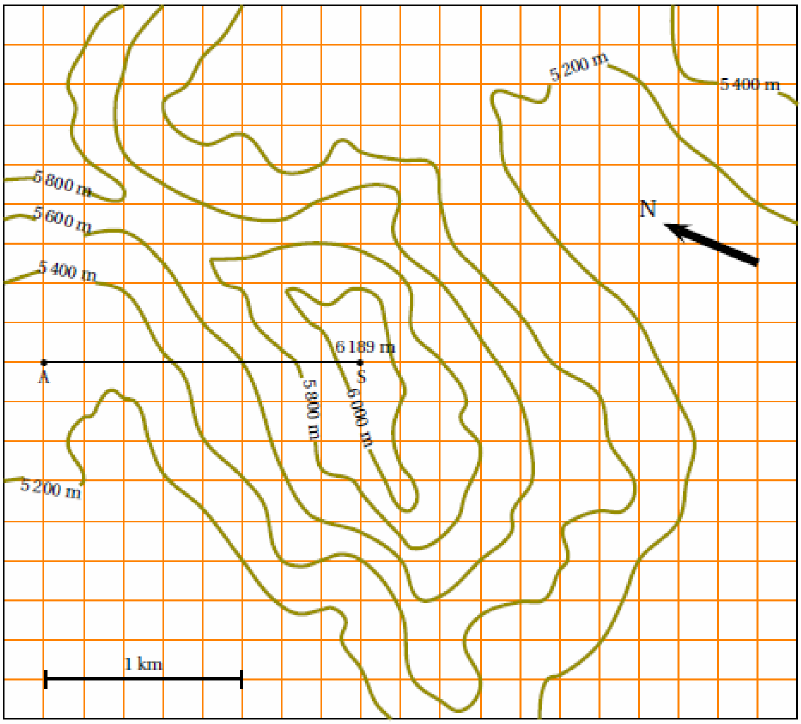
Phase 1 : un support concret : à la montagne (extrait Bac L maths info)

Le professeur laisse travailler ses élèves en autonomie sur le support proposé ci-dessous. Il passe dans les rangs pour aider ou débloquer certains élèves en difficulté. Des besoins se font sentir sur un éclairage entre « coefficient directeur » et « pente d'une droite ». Le professeur explore ces notions à l'aide du logiciel *GeoGebra* afin de créer des images mentales chez les apprenants. Une synthèse collective est réalisée à l'issue de ce travail qui conduit à l'élaboration d'une fiche-méthode.

Island peak 6189m - Makalu 8463 m

Ci-dessous se trouve la carte de la région montagneuse autour du sommet « Island Peak » au Népal. Le sommet culmine à 6 189 mètres d'altitude et est matérialisé sur la carte par le point S.

1. Hachurer sur la carte la zone montagneuse située à une altitude comprise entre 5 200 mètres et 5 400 mètres.



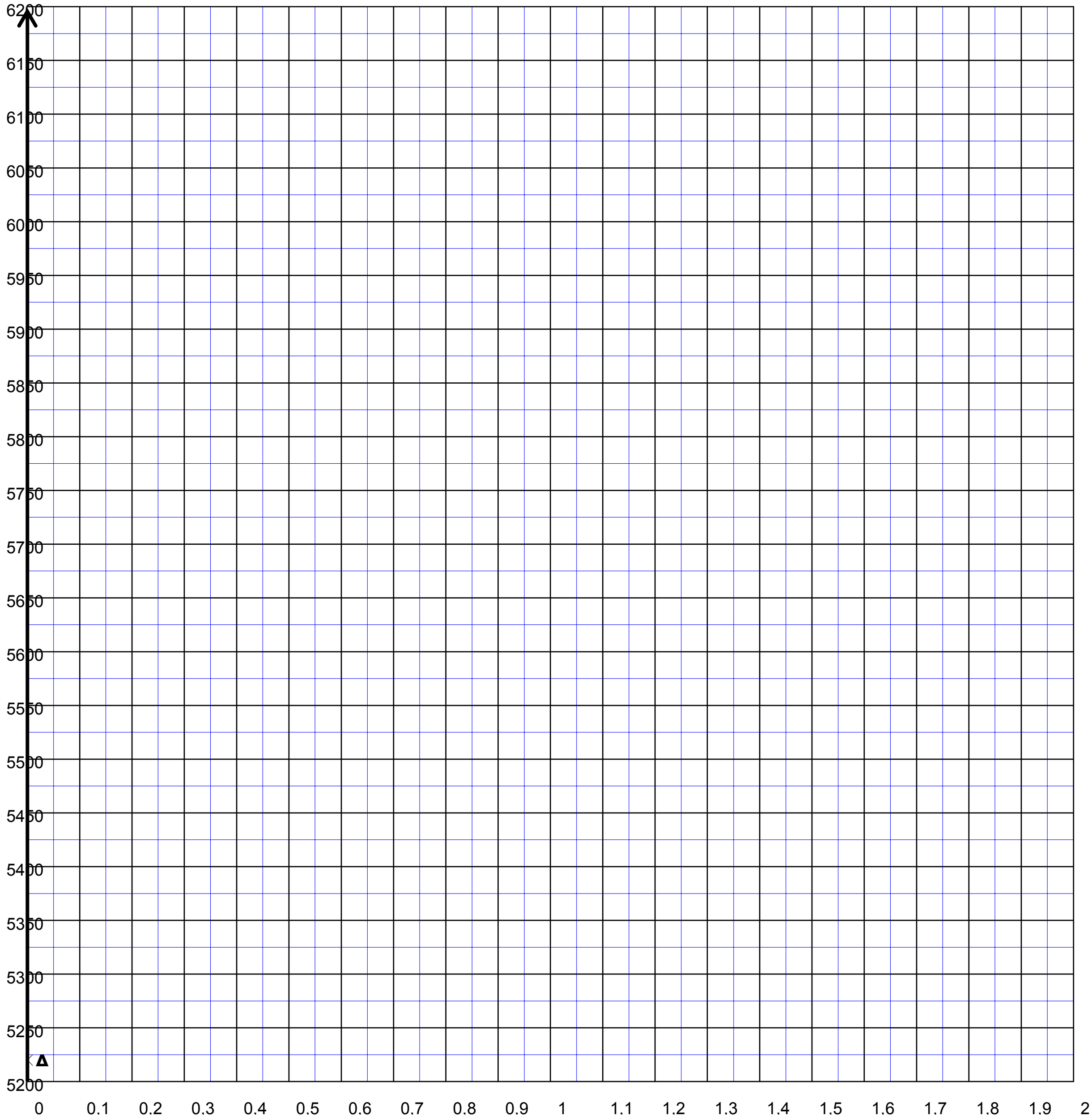
2. Alexandre a enfin réussi à s'offrir le trek de ses rêves : atteindre en quelques jours le camp de base de l'Everest que représente l'Island Peak.

Pour sa dernière étape, Alexandre va partir du point A situé à 5 220 mètres d'altitude pour arriver au sommet S en suivant le trajet indiqué sur la carte.

- À partir de la lecture de la carte, calculer l'élévation moyenne, exprimée en mètres par kilomètre parcouru, lors de sa dernière étape. Arrondir le résultat à l'unité.
- Dans un repère donné, le point A a pour coordonnées (0 ; 5 220). Tracer dans le repère donné un profil du parcours d'Alexandre.

Indication possible : pour aider à tracer le profil, on peut repérer sur la carte des points du parcours dont l'altitude est connue.

- Le profil obtenu est la représentation d'une fonction dite affine par morceaux. Quelle est son expression ?
- Que représente le coefficient directeur de chacun de ces segments de droites ?
- À l'aide d'un nouveau tracé, retrouver sur le graphique l'élévation moyenne par kilomètre parcouru.

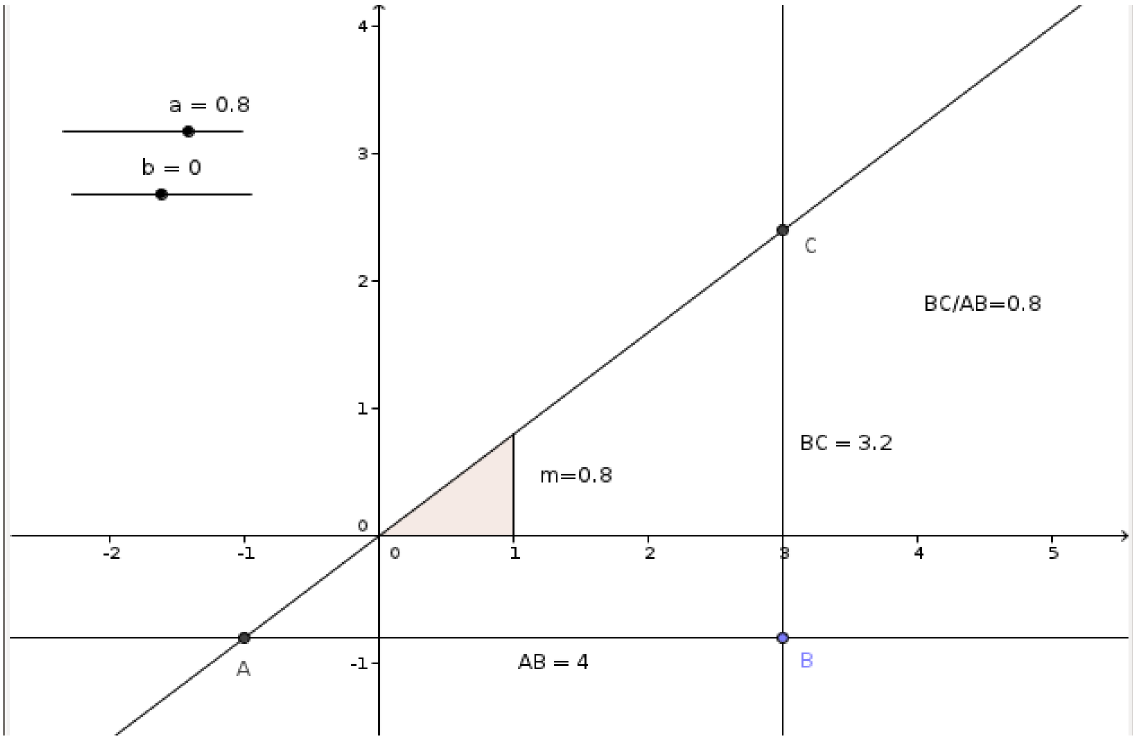


Phase 2 : prolongement de l'activité par l'élaboration d'une fiche personnelle.

En utilisant le logiciel *GéoGebra*, tracer la droite d'équation $y = ax + b$, a et b étant les valeurs données par deux curseurs. On se positionne par exemple sur $y= 0{,}8x$ dans un repère orthogonal. On prend le point A d'abscisse –1 de la droite tracée, B est un point mobile sur la droite horizontale passant par A et le point C est l'intersection de la droite tracée et de la perpendiculaire à (AB) passant par B. On calcule AB, BC, et le rapport BC/AB.

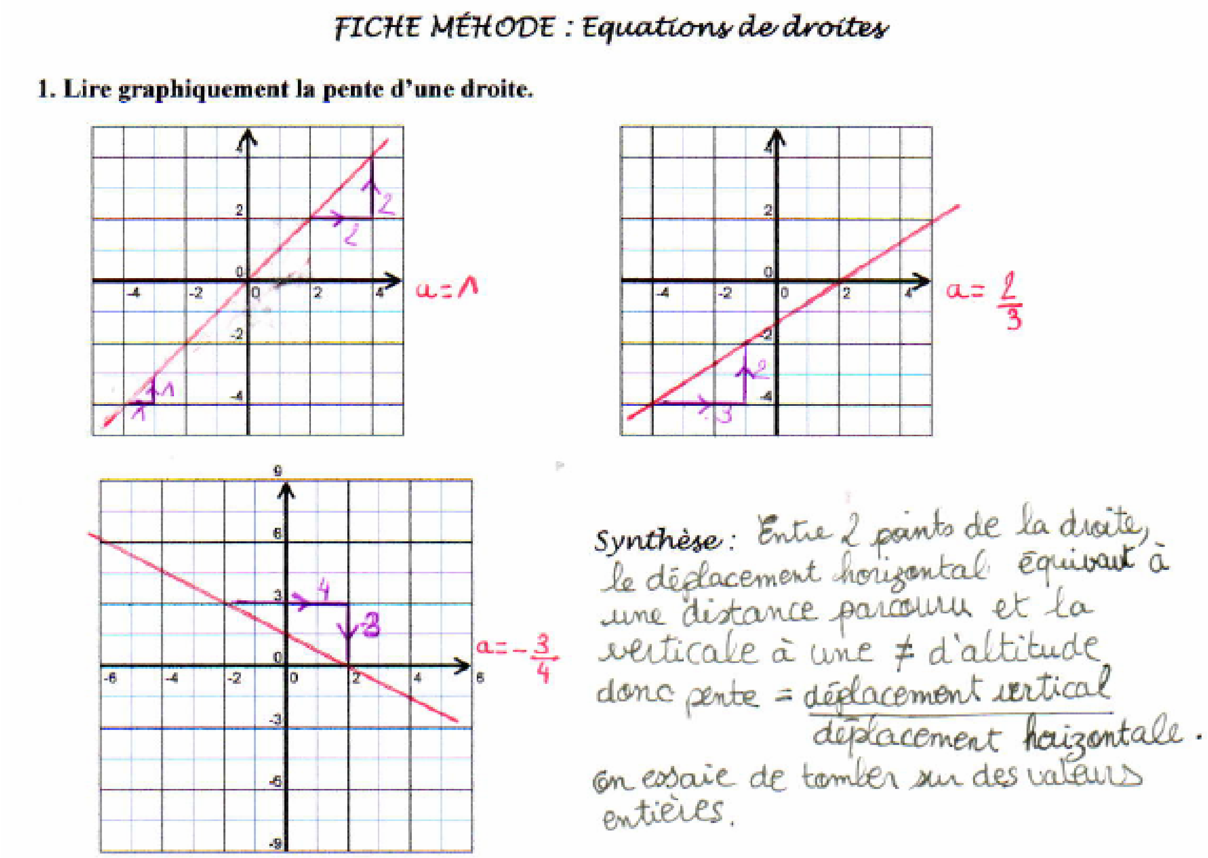
Les élèves remarquent alors que, quel que soit le point B, le rapport est constant.

Les triangles rectangles qui apparaissent à l'écran ont des côtés proportionnels.



À l'issue de cette activité, les élèves amorcent le début d'une **fiche-méthode qu'ils compléteront au fur et à mesure** des séances.

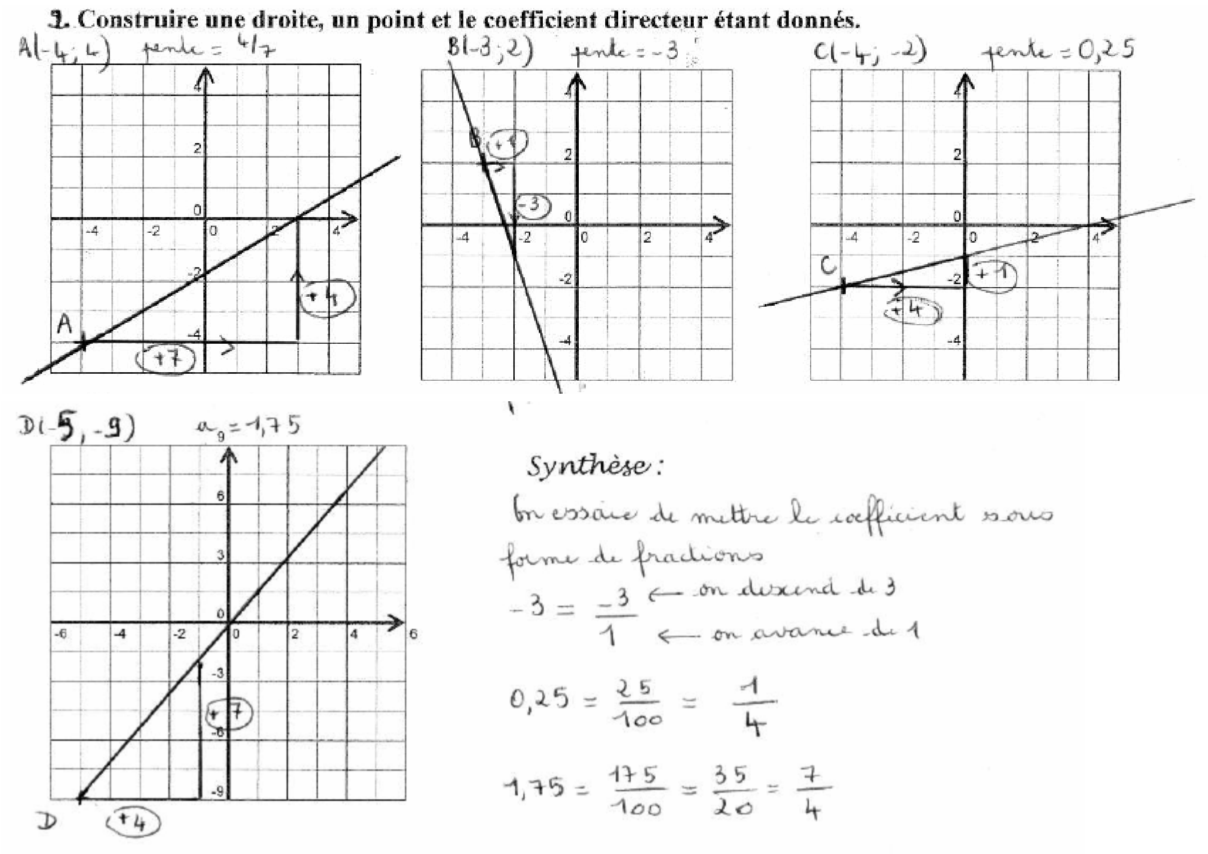
Exemple de fiche élaborée par des élèves :



FICHE MÉHODE : Equations de droites

1. Lire graphiquement la pente d'une droite.

Synthèse : Entre 2 points de la droite, le déplacement horizontal équivaut à une distance parcouru et la verticale à une ≠ d'altitude donc pente = $\frac{\text{déplacement vertical}}{\text{déplacement horizontale}}$.
On essaie de tomber sur des valeurs entières.



On pourra vérifier avec les élèves par calcul que si x « augmente » de 1 alors y « augmente » de a.

Phase 3 : lien graphique entre coefficient directeur et pente.

L'objectif de l'étude suivante est de créer chez les élèves des images mentales afin de les rendre capables d'appréhender le lien entre coefficient directeur et pente. Pour cela, on utilise le logiciel *GeoGebra*. Les élèves échangent leurs observations à l'oral et complètent en autonomie leur fiche-méthode selon leurs besoins.

On se placera dans un repère **orthonormé** et on continue d'exploiter la situation créée avec le logiciel *GeoGebra*.

a. Éduquer son œil, créer des liens entre coefficients directeurs et situations de la droite.

À l'oral, le professeur amène les élèves à s'intéresser aux questions suivantes :

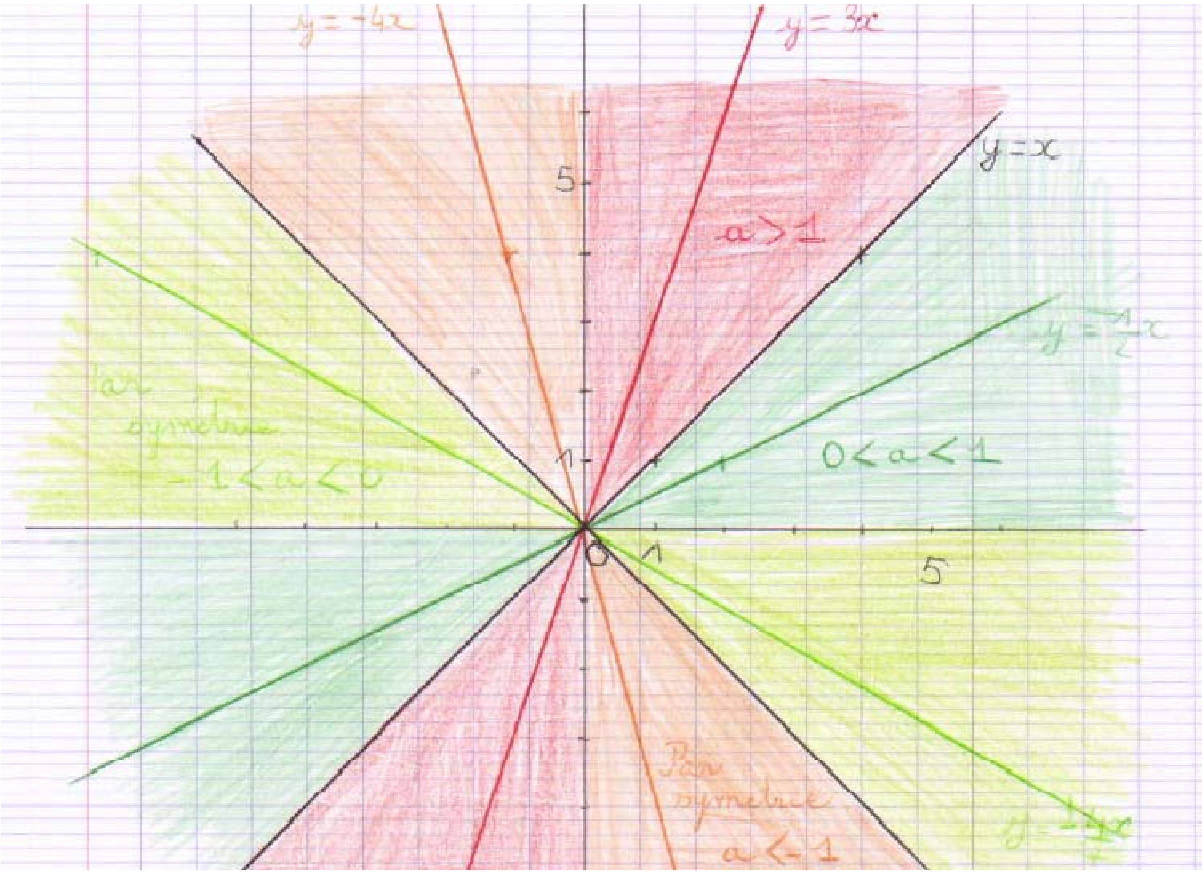
- Qu'observe-t-on quand on modifie le paramètre b ? Conclure.

On remarquera que $b = f(0)$.

- On fixe $b = 0$.

Qu'observe-ton lorsque $a > 1$? $a = 1$? $0 < a < 1$? $a = 0$? $-1 < a < 0$? $a = -1$?

Exemple de synthèse d'élève :



b. Symétries et coefficients directeurs.

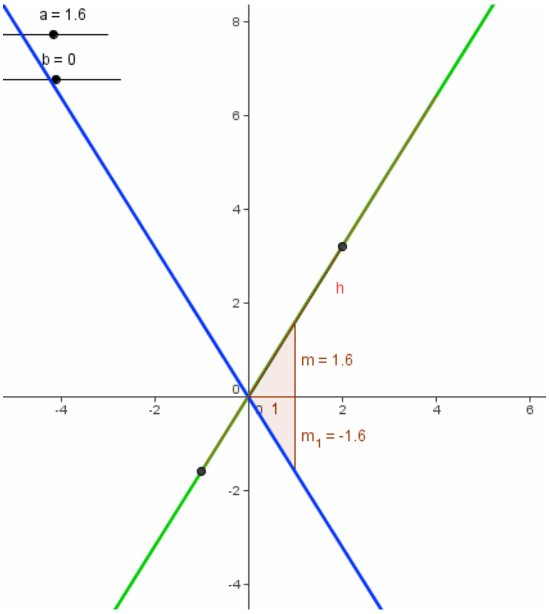
À l'aide du logiciel *GeoGebra*, tracer une droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = ax$, puis la droite $\mathcal{D}$' symétrique de $\mathcal{D}$ par rapport à l'axe des ordonnées. Que dire des coefficients directeurs des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}$' ?

Faire de même avec les droites symétriques de $\mathcal{D}$:

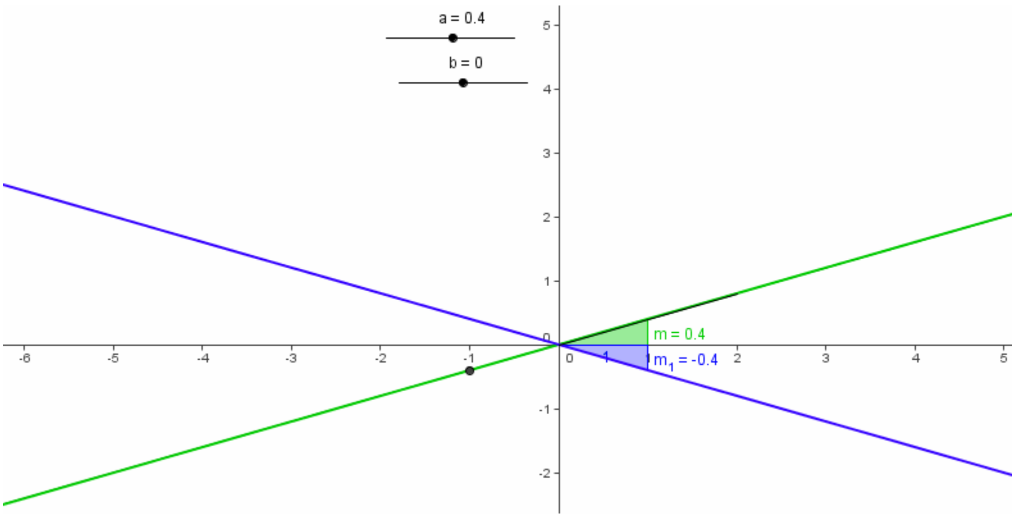
- par rapport à l'axe des abscisses,
- par rapport à la première bissectrice (droite d'équation $y = x$),
- par rapport à la seconde bissectrice (droite d'équation $y = -x$).

Dans les représentations ci-dessous, la droite verte est la droite initiale $\mathcal{D}$ et la droite bleue est sa symétrique par rapport à l'axe précisé.

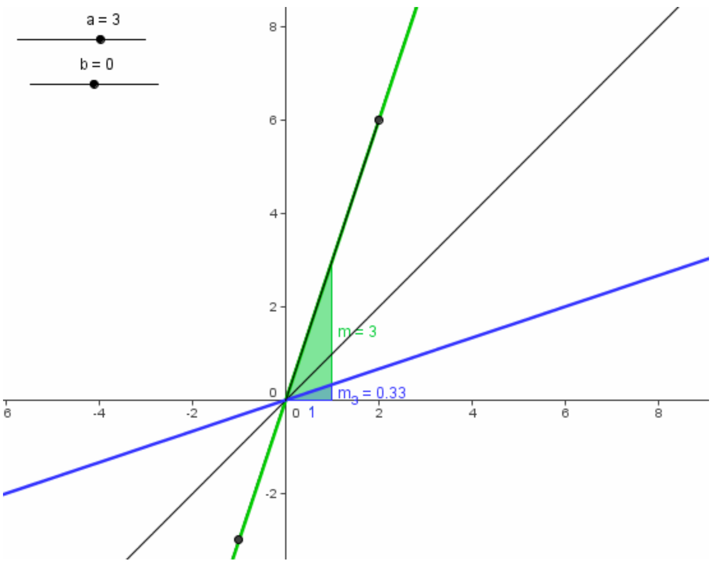
Symétrie par rapport à l'axe des abscisses :



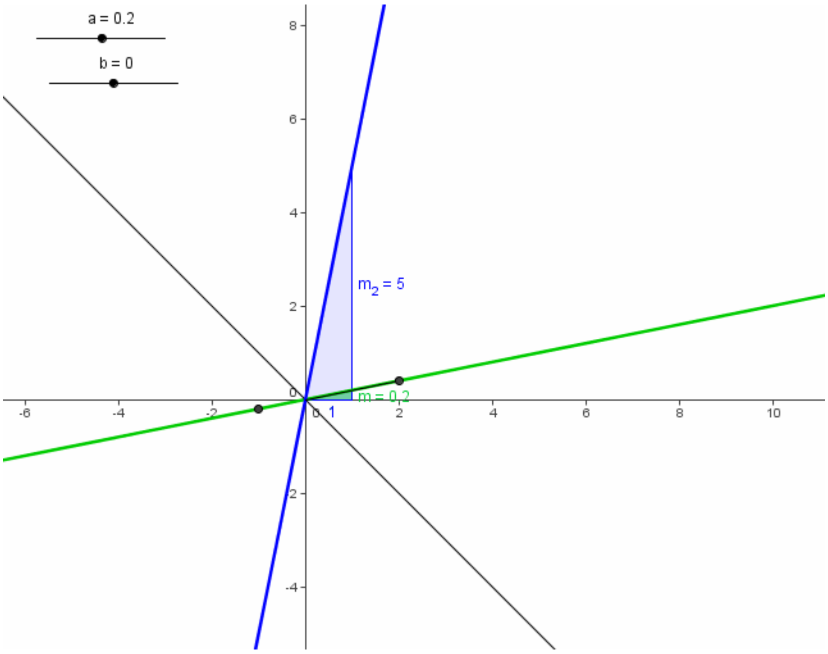
Symétrie par rapport à l'axe des ordonnées :



Symétrie par rapport à la première bissectrice :

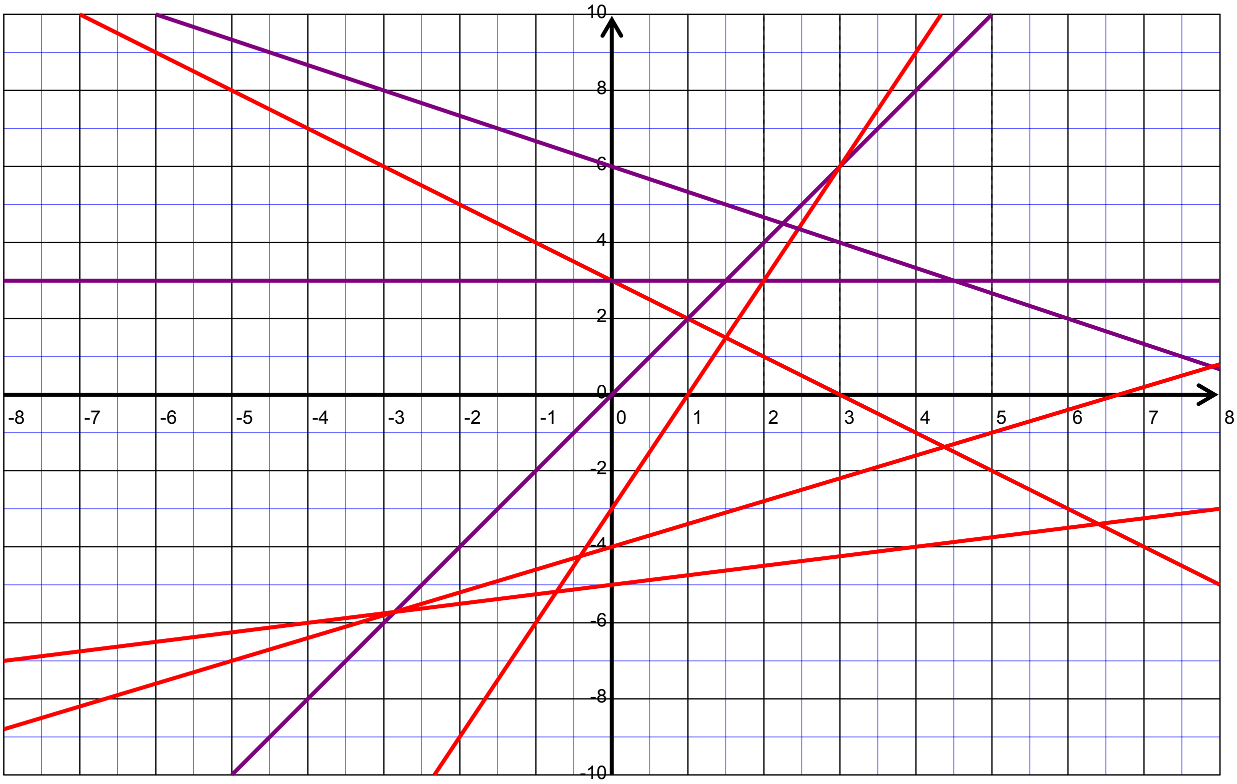


Symétrie par rapport à la seconde bissectrice :



Pour aller plus loin, on pourra se placer dans un repère orthogonal…

Pour conclure, une mise en application est réalisée en demandant aux élèves de déterminer les équations des droites représentées dans le repère ci-dessous :



Introduction à la dérivation en utilisant un T.B.I.

Problématiques développées : P1, P2, P4, P8 et P9.
Série : toutes séries (expérimenté en première ES-L).
Place dans la progression : avant le cours sur la dérivation.

Objectifs pédagogiques	Réactiver les connaissances sur les fonctions, sur les droites. Introduire un nouvel outil et montrer son intérêt.
Compétences	Avoir une attitude critique vis-à-vis des résultats obtenus. Mener des raisonnements. Communiquer à l'oral.
Connaissances	Les fonctions. Les droites.
Modalités de gestion de classe	Travail individuel et collectif.

Scénario d'introduction au chapitre sur la dérivation

Le scénario pédagogique consiste à introduire le nombre dérivé en classe de Première. Il a été testé en classe de 1ère L avec un groupe d'élèves peu habitués à manier les concepts d'analyse. Le professeur utilise un Tableau Blanc Interactif (T.B.I, appelé aussi T.N.I pour Tableau Numérique Interactif) ainsi que des boîtiers de vote.

Le tableau blanc interactif

Le T.B.I. est un outil numérique permettant de centraliser sur le tableau les logiciels, les cours, les écrits numérisés, en complète interaction à partir de l'écran de projection. L'enseignant est ainsi plus libre, il n'est plus astreint à rester à côté de l'ordinateur. Il fait face aux élèves et peut mieux observer son public. Les essais des élèves, les expérimentations effectuées peuvent être stockés afin de conserver trace de la vie mathématique de la classe.

Il est possible en outre d'utiliser des boîtiers d'évaluation qui permettent aux élèves de répondre en direct et de manière individuelle à des questionnaires à choix multiples. Les résultats des votes apparaissent en direct sur l'écran du T.B.I., et aident le professeur à établir des diagnostics sur les connaissances et les savoir-faire des élèves, ce qui lui permet ensuite de mettre en place les réponses pédagogiques appropriées.

Partie I : évaluation diagnostique des élèves

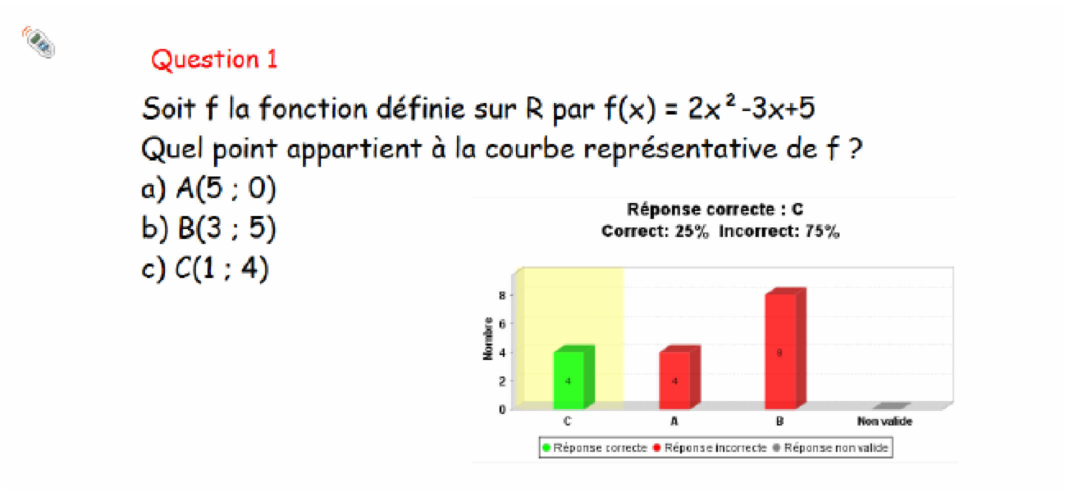
Afin de faire le point sur certaines connaissances des élèves portant sur les fonctions, nécessaires à une bonne compréhension du chapitre sur la dérivation, le professeur a conçu un QCM comprenant en particulier des distracteurs permettant de repérer quelques erreurs spécifiques. L'objectif de l'enseignant est ainsi d'effectuer en direct des remédiations personnalisées en classe entière.

Pour chaque question du QCM, l'élève doit voter pour la réponse qu'il pense être la bonne. Le tableau récapitulatif des résultats s'affiche ensuite sur le T.B.I..Le professeur relève les erreurs commises en temps réel, sans que la notion de sanction ne soit présente. Il repère un élève concerné par une erreur et lui demande d'expliquer son raisonnement. L'enseignant peut alors démonter les mécanismes erronés.

Cette expérimentation a duré 2 heures. Elle a permis de faire le point sur des notions essentielles portant sur les fonctions et a aidé les apprenants à créer leurs propres fiches méthodologiques. En effet, les élèves consignent, dans un petit cahier personnel, les aides, les méthodes, les outils de contrôle à l'aide des TIC (calcul formel, logiciel de géométrie…), les rappels de cours dont ils estiment avoir besoin, ainsi que leurs erreurs analysées et corrigées.

On trouvera ci-dessous les questions posées ainsi que des extraits de travaux effectués en classe, et notifiés dans certains « petits cahiers » d'élèves.

Question 1 :

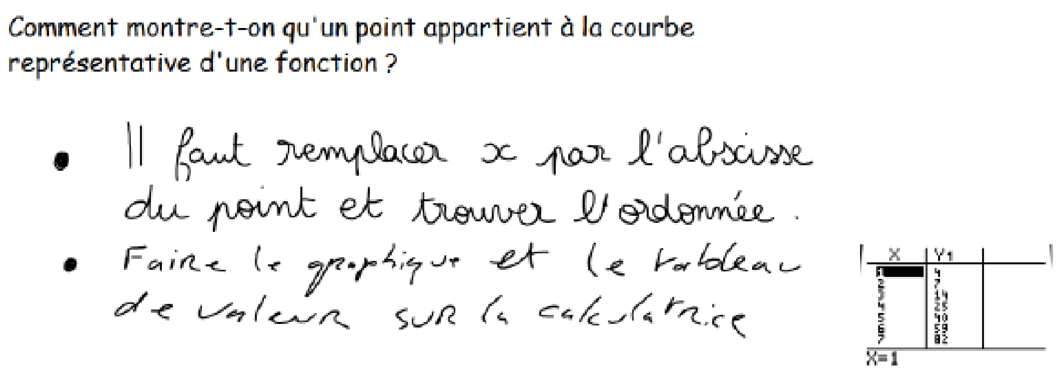


La moitié des élèves font une confusion avec la forme canonique dans laquelle on voit apparaître les coordonnées du sommet de la parabole et pensent qu'il y a un lien entre les coordonnées d'un point de la courbe et les coefficients de son équation. Un quart d'entre eux confondent abscisse et ordonnée.

Pistes de remédiation :

- Faire expliciter par un élève ayant répondu B la méthode permettant de contrôler qu'un point appartient à la courbe représentative d'une fonction.
- Mettre en évidence les liens entre la forme canonique et la parabole correspondante.
- Utiliser le tableau de valeurs de la calculatrice.
- Rappeler la définition de la courbe représentative d'une fonction.

Un extrait du cahier d'un élève :



Complément : On peut prolonger par l'écriture d'un algorithme :

Construire un algorithme vérifiant l'appartenance d'un point à la courbe

Entrée : on définit la fonction f
on entre les coordonnées (x, y) du point

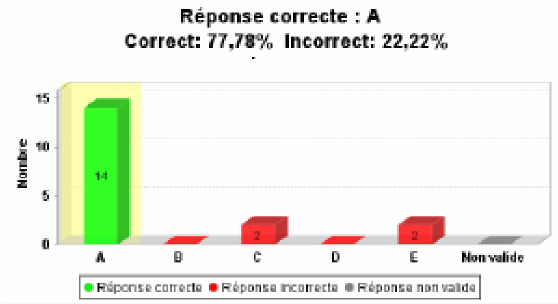
Traitement : si $f(x) = y$
alors afficher « oui »
sinon afficher « non »

Question 2 :

Question 2

Soit f la fonction définie sur R par $f(x)= 3-2x^2$.
Soit (C) sa courbe dans un repère orthonormé.
Le point M de (C) d'abscisse -3 a pour ordonnée :

a) -15
b) 21
c) -9
d) 9
e) -33



Les élèves ont manifestement retenu la notion d'appartenance à une courbe. Seules quelques erreurs de calcul sont relevées.

Piste de remédiation :

- Expliciter les règles de priorité des opérations.

Un extrait du cahier d'un élève :

Quelles étaient les erreurs visées dans la question précédente ?

$3-2\times(-3)^2$

$= 3-2\times 9$

$= -15$

$(-3)^2 \neq -9$

$(-3)^2 \neq 6$ Confusion carré - double

$2x^2 \neq (2x)^2$

Question 3 :

Question 3

Soit f la fonction définie sur R par $f(x)= 2x^2-1$

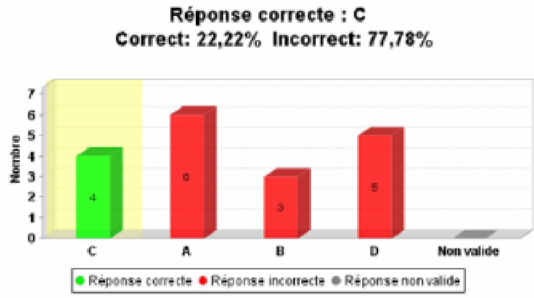
L'image du réel $1+h$ est :

a) $2h^2+1$

b) $3+4h+4h^2$

c) $1+4h+2h^2$

d) $1+h^2$



La plupart des élèves ne comprennent pas la question posée.

Pistes de remédiation :

- Faire expliquer par certains élèves le sens de cette question.
- Se réapproprier les identités remarquables.
- Apprendre à contrôler la validité du développement (usage de tests, utilisation d'un logiciel de calcul formel,…).

Un extrait du cahier d'un élève :

Comment contrôler le résultat de mon calcul ?

$$2(1+h)^2-1 = 2[1+\underline{2\times1\times h}+h^2]-1$$
$$= 2+4h+2h^2-1 = 2h^2+4h+1$$

• on peut contrôler en remplaçant h par une valeur par exemple 1.

$f(1+1)=2(2)^2-1=7$

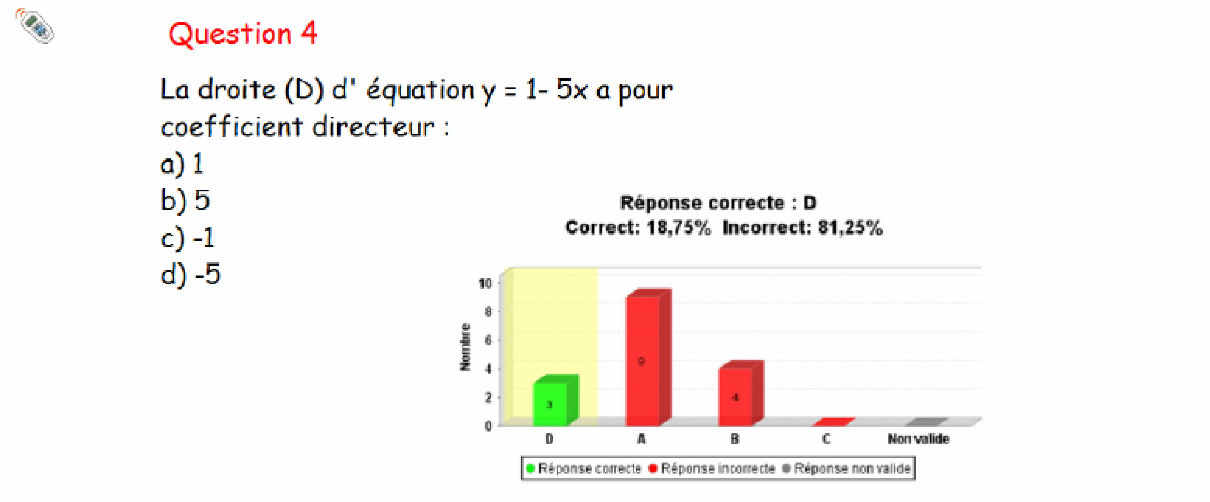
a) $2\times1^2+1=3$ b) $3+4+4=11$

c) $1+4+2=7$ d) $1+1^2=2$

• on utilise un logiciel de calcul formel

```
1 f(x):=2x^2-1
      x -> 2·x^2-1
2 f(1+h)
      2·(1+h)^2-1
3 simplify(f(1+h))
      2·h^2+4·h+1
```

Question 4 :

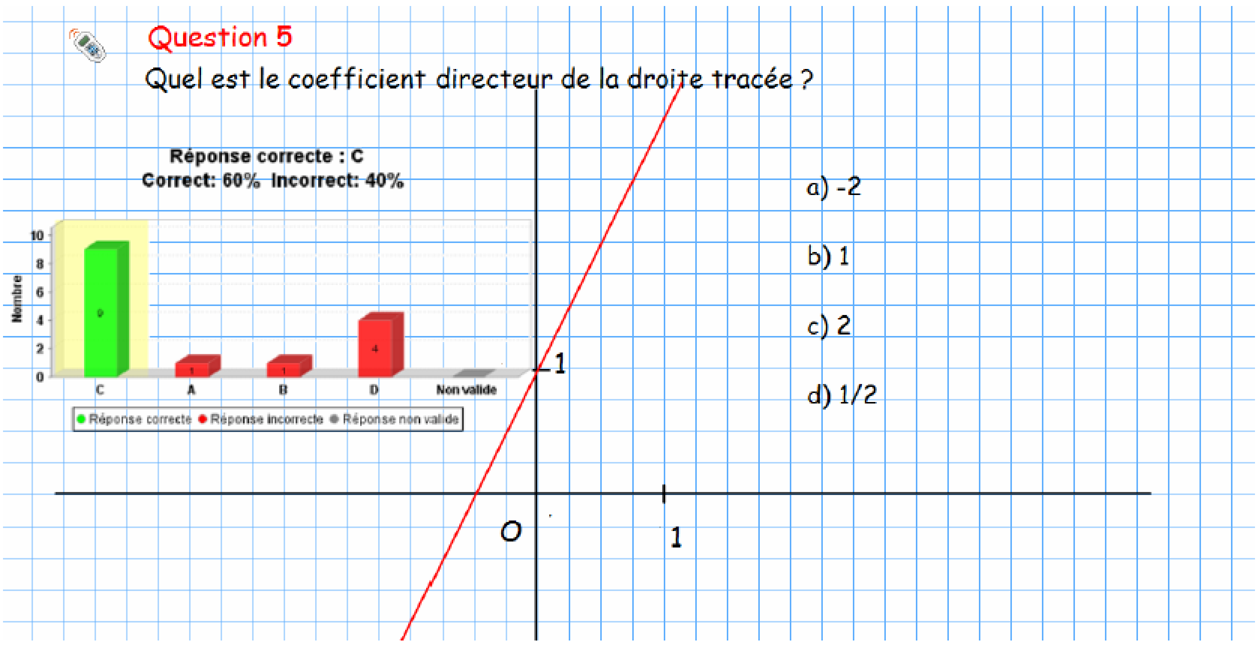


Les réponses mettent en évidence des connaissances trop fragiles.

Pistes de remédiation :

- Utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique pour construire une image mentale du coefficient directeur d'une droite.
- Travail sur la proportionnalité des accroissements de x et y. Faire remarquer alors que si x « augmente » de 1, alors y « augmente » de a.

Question 5 :

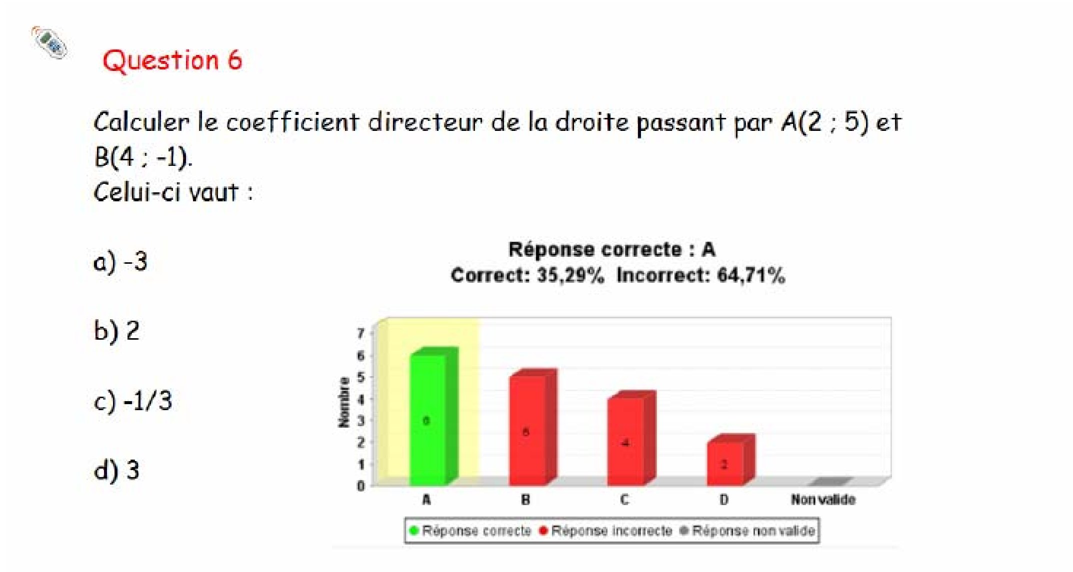


On note encore quelques confusions entre l'abscisse et l'ordonnée.

Pistes de remédiation :

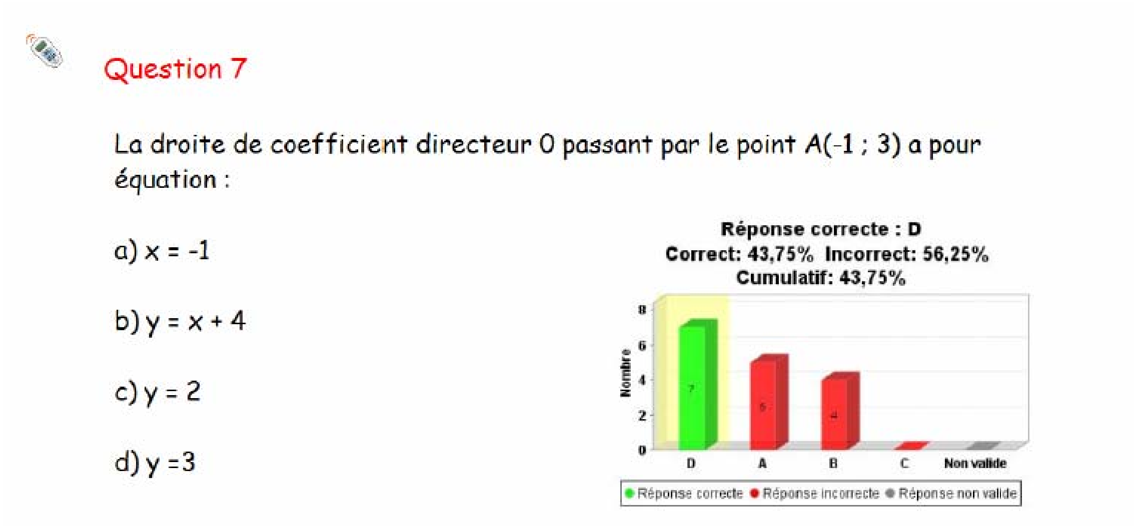
- Interpréter le coefficient directeur en termes d'inclinaison.
- Lire graphiquement le coefficient directeur d'une droite.
- Faire le lien avec la formule $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Question 6 :



Visualiser la droite permet d’apporter une remédiation efficace.

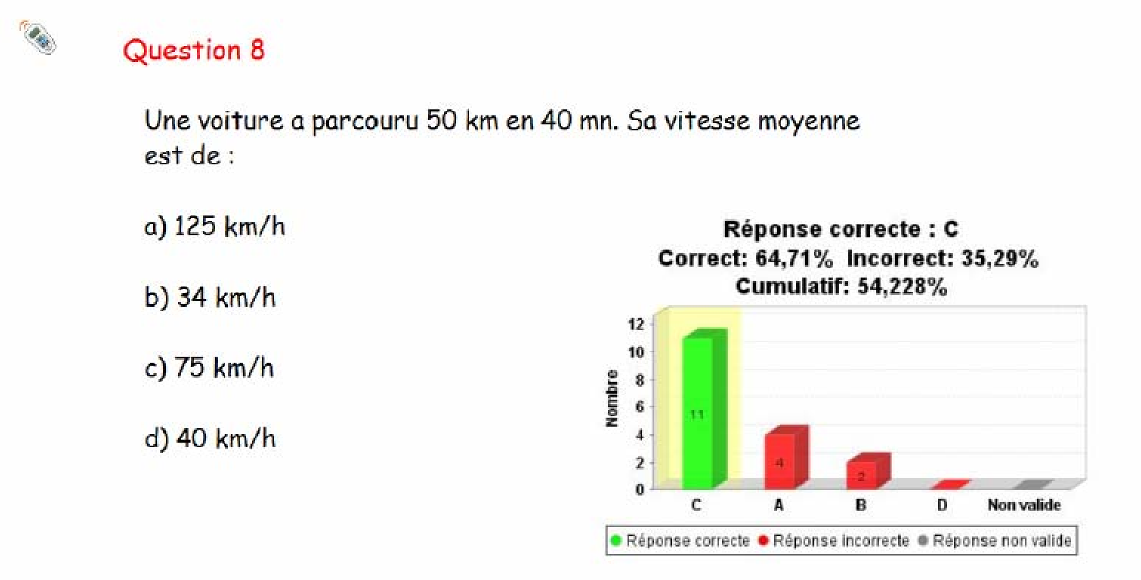
Question 7 :



Pistes de remédiation :

- Visualiser la droite horizontale.
- Caractériser l’ensemble des points ayant même ordonnée.
- Rappeler le lien entre coefficient directeur et inclinaison d’une droite.

Question 8 :



Pistes de remédiation :

- Donner du sens à la notion de vitesse.
- Explicitation des démarches utilisées (règle de trois, « produit en croix », propriétés de linéarité, formule sur la vitesse).

<u>Pistes de travail en accompagnement personnalisé (AP) ou à l'extérieur de la classe</u>

On pourra poursuivre les remédiations en Accompagnement Personnalisé à partir des notes écrites sur les « petits cahiers » des élèves qui constituent dorénavant des références pour les apprenants.

- Aide à la structuration des connaissances, à l'apprentissage d'une leçon : exposé oral des connaissances sur les fonctions affines.
- Aide au développement de l'autonomie : rédaction d'une fiche-méthode sur la lecture d'une image, d'un antécédent, construction d'un tableau de valeurs et d'une courbe représentative, vérification de l'appartenance d'un point à une courbe, fonctions polynômes du second degré…
- Utilisation de la fiche-méthode précédente pour résoudre des exercices d'entraînement choisis par l'élève lui-même en fonction de l'analyse qu'il fait de ses difficultés.
- Utilisation d'un exerciseur en ligne (Euler, WIMS…) pour des exercices répétitifs sur la lecture ou le calcul d'un coefficient directeur.

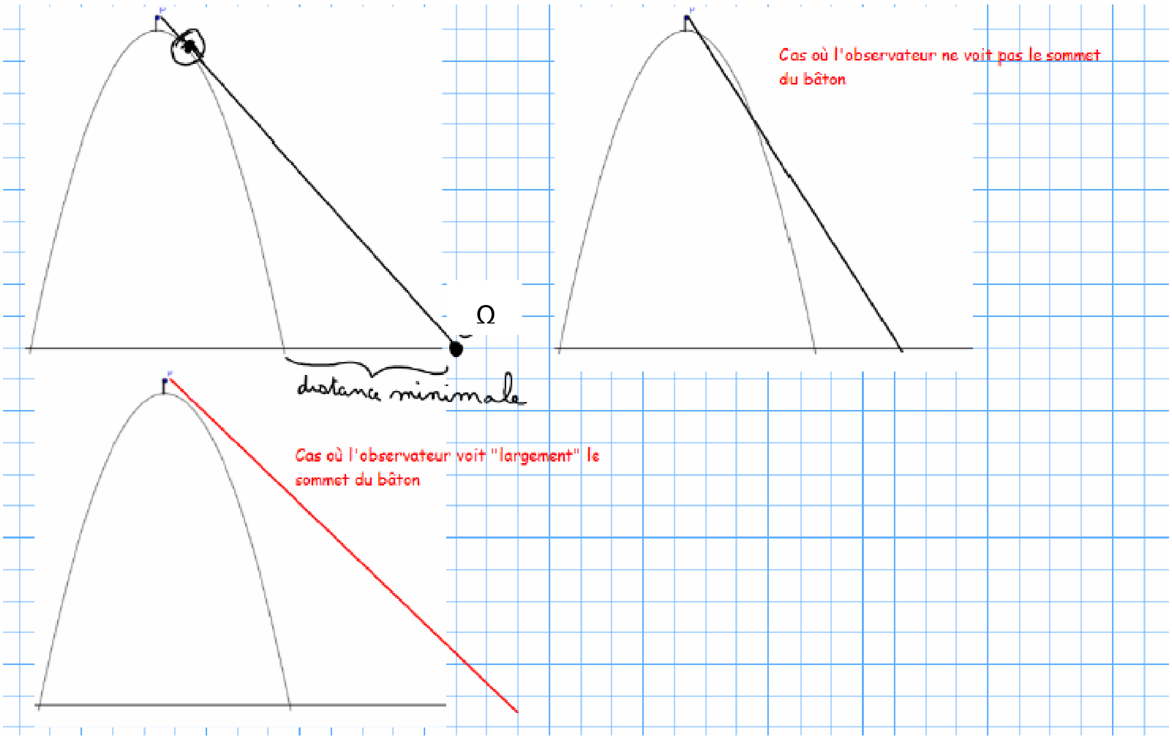
Partie II : découverte de la notion de tangente à une courbe

Reprise avec *GeoGebra* de l'activité terril (Document d'accompagnement – 2001).

L'énoncé du problème :

Au sommet d'un terril de 25m de haut se trouve planté un bâton de 1 m de haut. À quelle distance minimale du pied du terril faut-il se placer pour apercevoir le bout du bâton de 1 m de haut ?

Le professeur découpe le T.B.I. en quatre parties sur lesquelles le schéma du terril est représenté. Il propose à quatre élèves de positionner avec des tracés l'endroit où devrait se trouver l'observateur. Les différentes réflexions des élèves aboutissent au fait que la position la meilleure est celle où la droite (ΩP) reliant l'observateur au sommet du bâton « frôle » un point du terril. Le mot « tangente » est évoqué par certains apprenants. Les schémas suivants sont sélectionnés :



Le débat mathématique autour de l'existence d'une telle droite se poursuit dans la classe.

Le professeur demande aux élèves d'admettre que la ligne de pente de ce terril est une portion de la parabole d'équation $y = -x^2 + 25$.

On sait que l'ordonnée à l'origine est égale à 26. Donc la droite a une équation de la forme $y = ax + 26$, avec $a < 0$.

Puisqu'il y a un point d'intersection entre la droite et la parabole, alors x est solution de l'équation : $-x^2 + 25 = ax + 26$.

Soit à résoudre l'équation : $x^2 + ax + 1 = 0$.

Le groupe reconnaît une équation du second degré, dont le discriminant vaut $\Delta = a^2 - 4$.

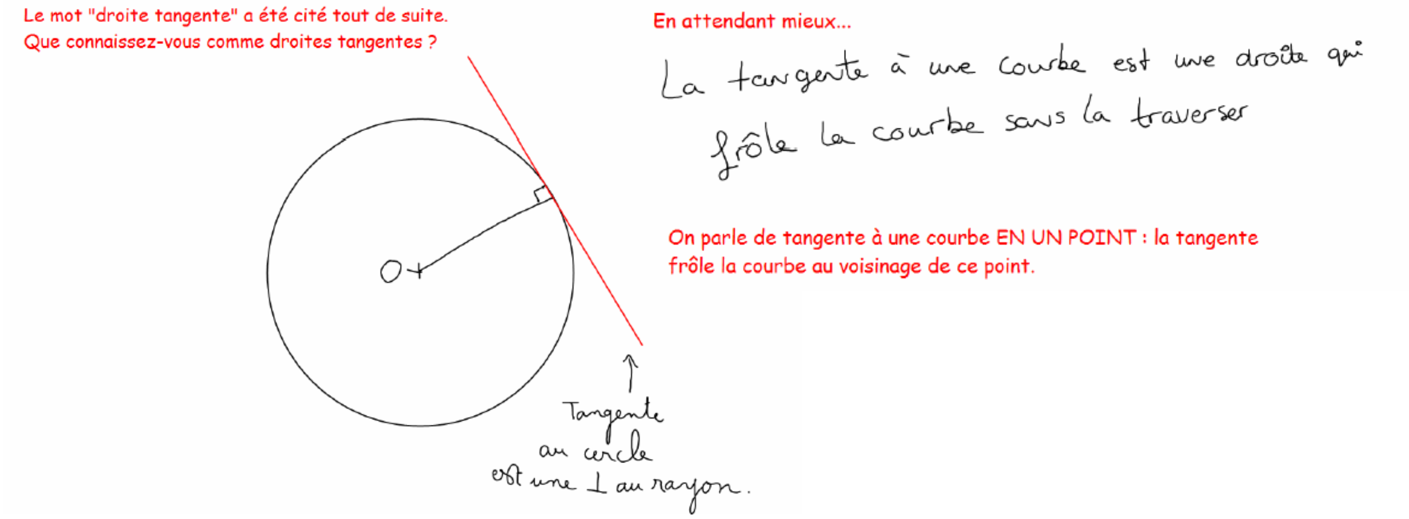
L'équation a une unique solution si et seulement si $a = -2$ (rappel : on sait que a est négatif).

Il reste à vérifier que le point d'intersection est le point de coordonnées (1 ; 24) et que la droite cherchée a pour équation $y = -2x + 26$.

Le point Ω a donc pour abscisse 13.

La tangente est la position limite d’une sécante.

Avec l’exemple du terril, les élèves ont donné « leur » définition de la tangente.



Le professeur utilise alors un logiciel de géométrie dynamique pour montrer qu’une tangente à une courbe est la position limite d’une sécante.

La définition de la tangente est ensuite donnée aux élèves. L’enseignant peut alors introduire le taux d’accroissement de la fonction f en a, $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, et sa limite quand h tend vers 0.

Partie III : définition du nombre dérivé et équation d’une tangente

Extrait des programmes des premières S, ES et L :

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Dérivation Nombre dérivé d’une fonction en un point. Tangente à la courbe représentative d’une fonction dérivable en un point.	• Tracer une tangente connaissant le nombre dérivé.	Le nombre dérivé est défini comme limite du taux d’accroissement $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ quand h tend vers 0. On ne donne pas de définition formelle de la limite. L’utilisation des outils logiciels facilite l’introduction du nombre dérivé.

Pour conclure le scénario pédagogique, le cours est synthétisé avec la classe. Il est suivi d’exercices d’application axés sur :

- la lecture graphique de nombres dérivés ;
- le tracé d’une tangente connaissant le coefficient directeur de la droite ;
- quelques calculs de taux d’accroissement à l’aide, si besoin, d’un logiciel de calcul formel ;
- la recherche d’équations de tangentes à une courbe donnée en un point.

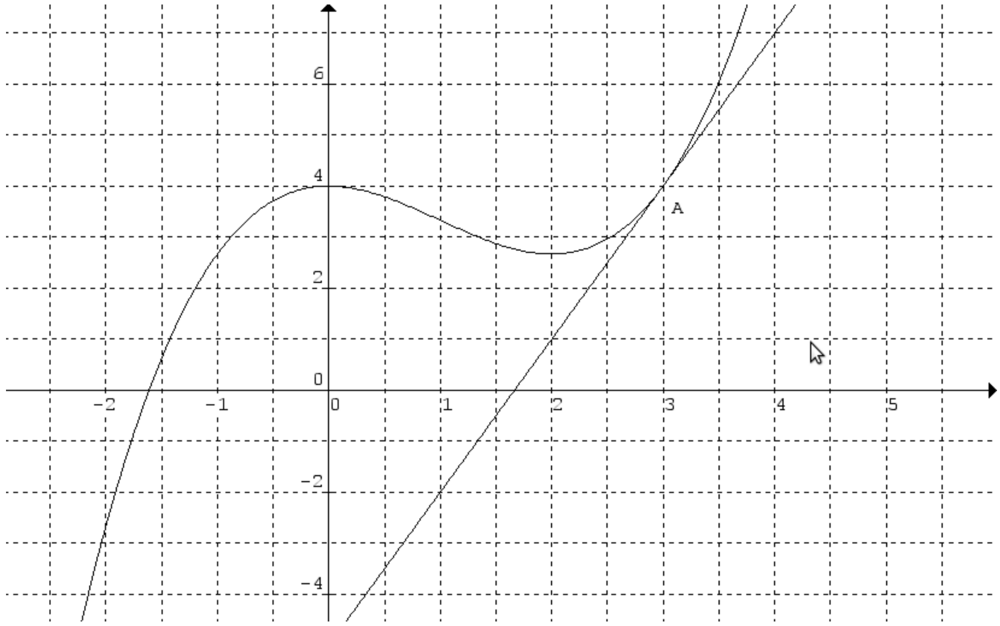
Partie IV : évaluation formative

Un Questionnaire à Choix Multiples, permettant à chaque élève de s’auto-évaluer, est mis en ligne par le professeur. Cette auto-évaluation aide l’élève à repérer ses points forts et ses points faibles. Il peut ainsi travailler certaines connaissances mal dominées, avec l’aide éventuelle d’un enseignant, avant une interrogation écrite.

1) La fonction f est définie sur l’ensemble des réels par $f(x) = -2x^2 + x + 2$. Lequel des points suivants appartient à la courbe représentative de f ?

a. A(2 ; 0)   b. B(1 ; 2)   c. C(2 ; 2)   d. D(2 ; -4)

On donne la courbe représentative d'une fonction g qui permet de répondre aux questions 2), 3), 4) et 5) :



2) La valeur de $g(-2)$ est :

a. $-2{,}5$ b. $-1{,}75$ c. 0 d. 0,5

3) La valeur de $g'(0)$ est:

a. 4 b. 7 c. 0 d. $-0{,}75$

4) Le coefficient directeur de la tangente au point A est :

a. 4 b. 3 c. -3 d. 2

5) La tangente tracée permet de déterminer :

a. $g'(4)$ b. $g'(3)$ c. $g'(-3)$ d. $g'(1{,}75)$

6) Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = x^2 - x + 2$. Pour déterminer $f'(1)$, il faut simplifier l'expression :

a. $\dfrac{f(h)-f(0)}{h}$ b. $\dfrac{f(1+h)-1}{h}$ c. $f(2)-f(1)$ d. $\dfrac{f(1+h)-2}{h}$

7) Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = x^2 - x + 2$.

On donne la copie d'écran issue de Xcas :

```
f(x):=x^2-x+2
                                        x -> x^2 -x+2
simplify(f(1+h))
                                        h^2 +h+2
```

La valeur de $f'(1)$ est : a. 2 b. 1 c. 4 d. 0

8) Soit g la fonction définie par $g(t) = \dfrac{t}{t-5}$

On donne la copie d'écran de Xcas:

```
g(t):=t/(t-5)
                                        t -> t/(t-5)
simplify((g(6+h)-g(6))/h)
                                        -5/(h+1)
```

La valeur de $g'(6)$ est : a. -5 b. $-\dfrac{5}{2}$ c. $-\dfrac{5}{7}$ d. 6

Une deuxième introduction à la dérivation

Problématiques développées : P2, P3 et P7.
Série : toutes séries (expérimenté en première S).
Place dans la progression : avant le cours sur la dérivation.

Objectifs pédagogiques	Introduire un nouvel outil, lui donner du sens et montrer son intérêt.
Compétences	Avoir une attitude critique vis-à-vis des résultats obtenus. Mener des raisonnements. Communiquer à l'oral.
Connaissances	Les fonctions. Les droites.
Logiciels	Logiciel de calcul formel.
Modalités de gestion de classe	Travail individuel et collectif.

Activité : « le radar »

Après un séjour passé en Allemagne, un célèbre professeur de mathématiques emprunte la voie express sans limitation de vitesse. Lors du passage de la frontière pour regagner la France, il réalise que la limitation de vitesse est de 130km/h. Il décide donc de freiner son véhicule afin d'éviter une éventuelle contravention! Il stabilise sa vitesse au bout de 4 secondes.

À partir du franchissement de la frontière par le véhicule, on note t le temps écoulé en seconde et $f(t)$ la distance parcourue en mètres.

Sur l'intervalle [0 ; 4], la fonction f est définie par $f(t) = \dfrac{480t}{t+12}$. Le graphique ci-dessous donne la courbe représentative de f sur l'intervalle [0 ; 4].

Partie A: Étude du mouvement

1. Calculer $\dfrac{f(3)-f(0{,}5)}{2{,}5}$ puis donner une interprétation du résultat.
2. Exprimer, à l'aide d'un logiciel de calcul formel, $V(h)=\dfrac{f(0{,}5+h)-f(0{,}5)}{h}$ en fonction de h puis donner une interprétation du résultat.
3. À l'aide de la calculatrice, observer les valeurs de $V(h)$ pour h variant de 0,1 à 0,5 avec un pas de 0,1.
Faire ensuite varier h de 0,01 à 0,1 avec un pas de 0,01.
Faire enfin varier h de 0,001 à 0,01 avec un pas de 0,001.
Lorsque h est proche de 0, que devient $V(h)$?

   Le résultat obtenu s'appelle la limite de $V(h)$ quand h tend vers 0. En terme concret, cette valeur correspond à la vitesse instantanée du véhicule à l'instant $t = 0{,}5$.
4. Le célèbre professeur de mathématiques aperçoit les gendarmes avec leur radar à l'instant $t = 0{,}5$. En tenant compte des vitesses retenues par le cinémomètre (voir tableau ci-dessous), est-il en infraction lorsqu'il est surpris par les gendarmes? Justifier votre réponse.

VITESSE ENREGISTRÉE	VITESSE RETENUE Cinémomètre		VITESSE ENREGISTRÉE	VITESSE RETENUE Cinémomètre		VITESSE ENREGISTRÉE	VITESSE RETENUE Cinémomètre	
	Fixe	Mobile		Fixe	Mobile		Fixe	Mobile
55	50	—	86	81	76	117	111	105
56	51	—	87	82	77	118	112	106
57	52	—	88	83	78	119	113	107
58	53	—	89	84	79	120	114	108
59	54	—	90	85	80	121	114	108
60	55	50	91	86	81	122	115	109
61	56	51	92	87	82	123	116	110
62	57	52	93	88	83	124	117	111
63	58	53	94	89	84	125	118	112
64	59	54	95	90	85	126	119	113
65	60	55	96	91	86	127	120	114
66	61	56	97	92	87	128	121	115
67	62	57	98	93	88	129	122	116
68	63	58	99	94	89	130	123	117
69	64	59	100	95	90	131	124	117
70	65	60	101	95	90	132	125	118
71	66	61	102	96	91	133	126	119
72	67	62	103	97	92	134	127	120
73	68	63	104	98	93	135	128	121
74	69	64	105	99	94	136	129	122
75	70	65	106	100	95	137	130	123
76	71	66	107	101	96	138	131	124
77	72	67	108	102	97	139	132	125
78	73	68	109	103	98	140	133	126
79	74	69	110	104	99	141	133	126
80	75	70	111	105	99	142	134	127
81	76	71	112	106	100	143	135	128
82	77	72	113	107	101	144	136	129
83	78	73	114	108	102	145	137	130
84	79	74	115	109	103	146	138	131
85	80	75	116	110	104	147	139	132

La première colonne donne la vitesse enregistrée par le cinémomètre. Afin de tenir compte des erreurs de mesure, cette vitesse enregistrée est transformée en une vitesse retenue, qui est celle utilisée pour constater une infraction.

Lorsque le cinémomètre est fixe, la deuxième colonne du tableau donne la vitesse retenue ; lorsque l'appareil est embarqué à l'intérieur d'une voiture de gendarmerie et que la mesure se fait en roulant, c'est la troisième colonne du tableau qui donne la vitesse retenue.

Partie B : Par le calcul formel

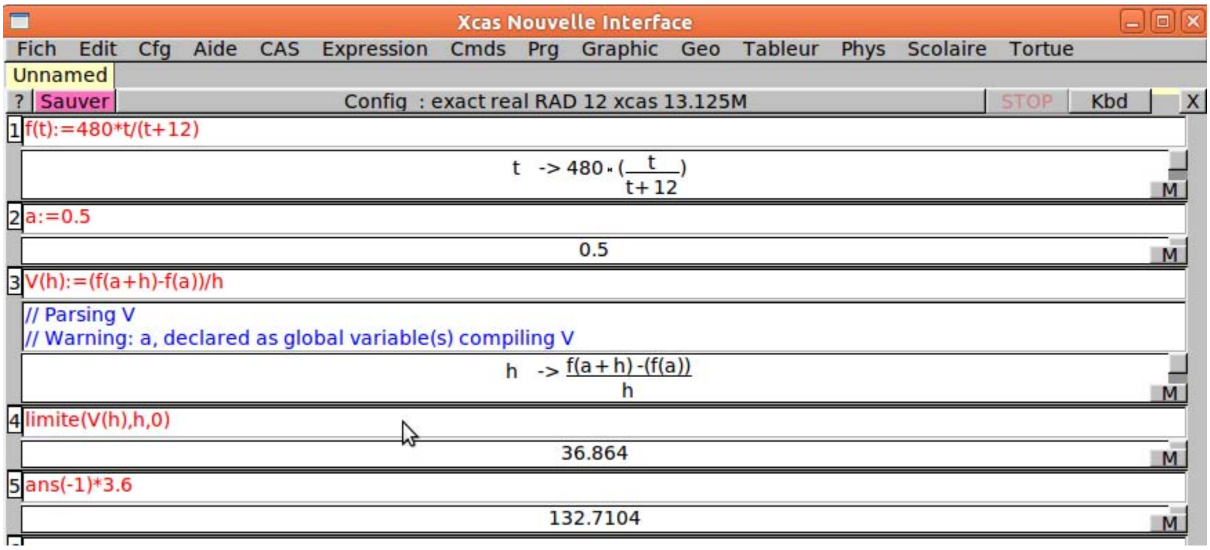
Émettre une conjecture quant à l'instant t, compris entre 0 et 4, à partir duquel la vitesse du célèbre professeur de mathématiques restera inférieure à 110km/h (on demande une valeur arrondie de t à la seconde près).

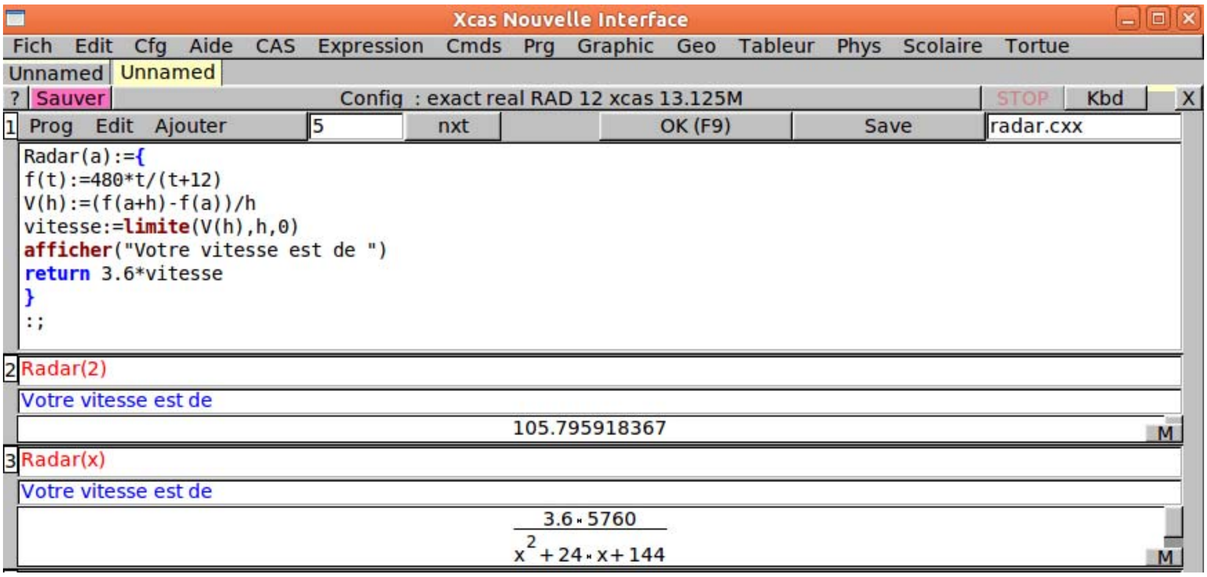
Aide : pour le logiciel de calcul formel *Xcas*, la commande qui permet de calculer la limite de $V(h)$ quand h tend vers 0 est limite($V(h)$,h,0).

Partie C : Par l'algorithmique

5. Écrire un algorithme permettant de calculer la vitesse instantanée du célèbre professeur de mathématiques à un instant a compris entre 0 et 4.
6. Écrire cet algorithme en langage Xcas puis exécuter ce programme pour différentes valeurs de a, comprises entre 0 et 4.
7. À l'aide du programme, déterminer en fonction de l'instant x, la vitesse instantanée du célèbre professeur de mathématiques.

Éléments de réponse





3. Pourcentages

Job de vacances

Cette activité a pour but :

- d'entraîner les élèves à une pratique aisée de techniques élémentaires de calcul sur les pourcentages ;
- d'amener les élèves à avoir une attitude critique vis-à-vis des informations chiffrées.

Problématiques développées : P1, P2, P6.
Série : ES - L.
Place dans la progression : pendant le cours sur les pourcentages.

Objectifs pédagogiques	Réactiver les connaissances sur les pourcentages. Donner un sens concret au lien entre une évolution et un pourcentage.
Compétences	Rechercher, extraire et organiser l'information utile. Mettre en œuvre une recherche de façon autonome. Communiquer à l'oral.
Connaissances	Pourcentages.
Modalités de gestion de classe	Travail individuel.

Scénario pédagogique

Étape 1 : le professeur laisse travailler les élèves en autonomie sur le support donné sur la page suivante. Il passe dans les rangs aider ou débloquer certains élèves en difficulté. Une synthèse collective est réalisée à l'issue du travail.

Aurélie, une jeune fille de 16 ans, a trouvé un premier emploi de vacances en tant qu'animatrice dans le centre de vacances « Les alouettes ». Elle doit effectuer 109 heures de travail pour un salaire net de 647 euros auquel s'ajoutent 79 euros d'indemnités de congés payés.

En se renseignant sur la législation en vigueur concernant les salaires et indemnités de congés payés, elle a trouvé les informations suivantes :

Salaire et indemnité de congés payés (Circulaire DRT n° 2002-15 du 22 août 2002)

Le salaire minimum de croissance (SMIC) est le salaire horaire en dessous duquel il est interdit de rémunérer un salarié et ce, quelle que soit la forme de sa rémunération (au temps, au rendement, à la tâche, à la pièce, à la commission ou au pourboire). Le SMIC assure aux salariés dont les salaires sont les plus faibles la garantie de leur pouvoir d'achat et une participation au développement économique de la Nation.

Le montant du **SMIC horaire brut** est fixé, depuis le 1er janvier 2011, à 9 €.

Les jeunes de moins de 18 ans titulaires d'un contrat de travail sont rémunérés au minimum sur la base du SMIC :

- minoré de 20 % avant 17 ans,
- minoré de 10 % entre 17 et 18 ans.

A noter : pas de minoration de la rémunération si le jeune possède six mois de pratique professionnelle dans la branche.

L'employeur calcule le **salaire net** en déduisant du salaire brut les **charges salariales** qui représentent environ 20% du salaire brut.

Au terme de son contrat, le jeune reçoit une **indemnité de congés payés**. Le montant de cette indemnité est obtenu de la façon suivante :

- on prend 10 % des salaires bruts perçus ;
- on enlève les charges salariales qui représentent environ 20% de cette somme.

Compte tenu de ces informations, Aurélie a-t-elle intérêt à accepter cet emploi ?

Étape 2 : *les élèves prennent connaissance du document donné sur la page suivante. Après qu'ils se soient appropriés ce document, une discussion s'établit pour expliciter certains mots ou certaines notions. Les élèves travaillent ensuite en autonomie puis une synthèse collective est réalisée à l'issue du travail.*

Voici la fiche de salaire d'une employée de 20 ans du centre de vacances « Les alouettes » qui effectue 120 heures de travail :

Association Les Alouettes	
2 rue Saint Michel	
59009 VILLENEUVE D'ASCQ	
SIRET	53713180700039
URSSAF	280 403 4179461

BULLETIN DE PAIE

Période	du 01/07/2011 au 31/07/2011
Paiement	Par virement le 01/08/2011
Plafond du mois	1899,00

Code salarié	S353
Emploi	Animatrice saisonnière
Qualification	Stagiaire BAFA
Heures de présence	120,00

Gabriella SOLIS
56 Avenue Aimé Césaire
59343 ROUBAIX

Elément	Libellé	Base	Taux salarial	Montant salarial	Cotisation patronale	
					Tx patronal	Mont. patronal
7234	Salaire de base	120,00	9,0000	1080,00		
2726	Congés payés	1080,00	10,0000	108,00		
	SALAIRE BRUT			1188,00		
	CHARGES					
55	CSG déductible	1009,80	5,1000	-51,50		
56	CSG non déductible	1009,80	2,4000	-24,24		
57	CRDS	1009,80	0,5000	-5,05		
58	Maladie, maternité, décès	1188,00	0,7500	-8,91	12,8000	152,06
61	Vieillesse plafonnée	1188,00	6,6500	-79,00	8,3000	98,60
332	Solidarité autonomie	1188,00			0,3000	3,56
299	Vieillesse déplafonnée	1188,00	0,1000	-1,19	1,6000	19,01
64	Allocations familiales	1188,00			5,4000	64,15
65	Aide au logement	1188,00			0,1000	1,19
1251	Aide au logement collectivités	1188,00			0,5000	5,94
66	Accident du travail	1188,00			1,1000	13,07
75	Transport	1188,00			1,7000	20,20
67	Retraite	1188,00	2,2800	-27,09	3,4100	40,51
73	Centre de gestion	1188,00			0,5500	6,53
74	Centre National de la Fonction Publique Territoriale	1188,00			1,0000	11,88
	TOTAL COTISATIONS			196,97		436,71
	MONTANT A VERSER			991,03		

1°) Citer deux cotisations payées uniquement par le salarié. Citer deux cotisations payées par le salarié et l'employeur.

2°) Quel est le coût total de ce salarié pour le centre de vacances ?

3°) La base de calcul pour les deux CSG (déductible et non-déductible) et la CRDS est un pourcentage du salaire brut. Déterminer ce pourcentage.

4°) Afin de calculer le pourcentage du salaire brut que représentent les charges salariales, Léa a fait la somme des taux et a trouvé 17,78. Est-ce exact ?

Approfondissement possible :

Le gouvernement envisage de faire passer le montant de la CSG déductible de 5,1% à 6,1%. Quel sera alors le pourcentage de diminution du salaire ?

Etape 3 *: travail en temps libre ou en salle informatique.*

En utilisant un tableur, établir la fiche de salaire d'un salarié de 19 ans de ce centre de vacances effectuant 160 heures de travail.

Calcul d’impôts

Cette activité (extrait du sujet du groupement 5 du CRPE session 2009) a pour but :

- d’entraîner les élèves à une pratique aisée de techniques élémentaires de calcul sur les pourcentages ;
- d’amener les élèves à avoir une attitude critique vis-à-vis des informations chiffrées.

Problématiques développées : P1 et P6.
Série : ES - L.
Place dans la progression : pendant le cours sur les pourcentages.

Objectifs pédagogiques	Réactiver les connaissances sur les pourcentages. Donner un sens concret au lien entre une évolution et un pourcentage.
Compétences	Rechercher, extraire et organiser l’information utile. Mettre en œuvre une recherche de façon autonome. Communiquer à l’oral.
Connaissances	Pourcentages.
Modalités de gestion de classe	Travail individuel.

M. et Mme Durand sont mariés et n’ont pas de personne à charge.
Pour l’année étudiée dans cet exercice, leur revenu imposable est de 50 000 €.

1°) Sachant que ce revenu imposable a été calculé en opérant sur le revenu annuel du couple une réduction de 10%, calculer le revenu annuel du couple avant cette réduction.

2°) Le revenu annuel de Mme Durand représente 85 % du revenu annuel de M. Durand. Quel est le revenu annuel de M. Durand ?

3°) Pour les couples mariés sans personne à charge, le nombre de parts N est égal à 2.
Calculer le montant de l’impôt à payer pour ce couple en utilisant le barème donné ci-dessous :

4 CALCULEZ LE QUOTIENT FAMILIAL CORRESPONDANT À VOTRE NOMBRE DE PARTS

Ce quotient « QF » est égal à : $\dfrac{\text{R (revenu imposable)}}{\text{N (nombre de parts)}}$ = ...

Recherchez ci-dessous la tranche dans laquelle est situé votre quotient familial « QF » (et non pas votre revenu).

5 CALCULEZ VOTRE IMPÔT « I » À L’AIDE DU BARÈME SUIVANT :

Si votre « QF » $\left(\frac{R}{N}\right)$	n’excède pas 5 687 €		votre impôt sera égal à :	0
	est supérieur à 5 687 €	et inférieur ou égal à 11 344 €	votre impôt sera égal à :	(R × 0,055) – (312,79 € × N)
	est supérieur à 11 344 €	et inférieur ou égal à 25 195 €	votre impôt sera égal à :	(R × 0,14) – (1 277,03 € × N)
	est supérieur à 25 195 €	et inférieur ou égal à 67 546 €	votre impôt sera égal à :	(R × 0,30) – (5 308,23 € × N)
	est supérieur à 67 546 €		votre impôt sera égal à :	(R × 0,40) – (12 062,83 € × N)

Source: Ministère de l'Économie et des finances

4°) On avait proposé à Mme Durand un autre poste lui offrant une augmentation de son revenu annuel de 1 000 €.

Son mari l’en avait dissuadée en lui disant : « Tu n’y songes pas ! Avec ce nouveau poste, nous allons changer de tranche d’imposition et toute ton augmentation va être absorbée par les impôts.»

Son argument était-il valable ? Expliquer la réponse.

4. Suites

Modes de génération d'une suite

Ces deux activités ont pour but d'illustrer des modes de génération de suites à partir de nuages de points à l'aide d'un lissage par moyennes mobiles. Les travaux s'effectuent sur tableur. L'objectif est également de donner un sens concret, ici économique, à la notion de suite.

Problématiques développées : P2, P3 et P6.
Série : ES-L, éventuellement S.
Place dans la progression : avant le chapitre sur les suites.

Objectifs pédagogiques	Introduire la notion de suites et exploiter sa représentation graphique.
Compétences	Mettre en œuvre une recherche de façon autonome. Mener des raisonnements. Avoir une attitude critique face aux résultats obtenus. Communiquer à l'oral. B2I lycée.
Connaissances	Représentation d'une série statistique. Notion d'évolution.
Logiciels	Tableur
Modalités de gestion de classe	Travail individuel. Accompagnement personnalisé.

Exemple 1 : illustrer l'évolution du prix de l'essence

Trois documents sont fournis aux élèves : 1) un extrait d'un cours d'économie, 2) un tableau donnant les prix de l'essence sur une période et 3) quelques éléments du contexte économique de cette période.

Document 1 : extrait d'un cours d'économie

Une série chronologique est une série statistique ordonnée en fonction du temps.

Sur la représentation graphique d'une série chronologique, on peut distinguer les composantes fondamentales suivantes :

• le mouvement de tendance générale ou trend indiquant l'évolution générale du phénomène étudié ;

• les mouvements cycliques sur une grande période autour du trend. Ces mouvements peuvent être périodiques (exemple : récession et expansion économique, etc.) ;

• les mouvements saisonniers ou variations saisonnières sont des variations se reproduisant périodiquement à des moments bien déterminés (exemple : vente de mazout avant l'hiver, etc.) ;

• les mouvements accidentels ou résiduels sont dus à des facteurs exceptionnels pour la plupart imprévisibles (grève, risque de guerre, etc.).

Document 2 : prix de l'essence sur une période

Le document ci-dessous donne les variations du prix d'un litre d'essence entre les années 1988 et 2007. Ces prix sont exprimés en euros.

Année	Prix
1988	0,749
1989	0,813
1990	0,816
1991	0,805
1992	0,784
1993	0,788
1994	0,819
1995	0,867
1996	0,921
1997	0,956

Année	Prix
1998	0,980
1999	1,006
2000	1,099
2001	1,049
2002	1,000
2003	1,040
2004	1,070
2005	1,220
2006	1,250
2007	1,265

Source : Insee, annuaire statistique de la France

Document 3 : contexte historique de cette période

• Les prix s'effondrèrent en 1987. Ces bas prix stimulèrent la consommation et ralentirent la production hors moyen orient où les coûts d'exploitation sont plus élevés (cas de l'extraction offshore par exemple).

• Les conflits entre le Koweït et l'Iraq en 1990 annulèrent l'offre de pétrole de ces pays qui fut compensée par l'Arabie Saoudite et le Venezuela pour la majorité, le reste des pays de l'OPEP comblant le manque à produire.

• Les prix en déclin depuis le début des années 1990 ne remontèrent qu'à partir du boom économique aux États-unis et en Asie au milieu des années 1990.

• La crise financière asiatique mit un terme brutal à l'embellie des prix à partir de 1997.

• Le déclin des prix s'accentua jusqu'en février 1999 pour atteindre 10 dollars américains/baril. Puis à partir de mars 99, à la suite d'un accord de réduction de la production des pays de l'OPEP mais aussi d'Oman, de la Fédération de Russie, de Mexico et de la Norvège, les prix n'ont cessé d'augmenter jusqu'à atteindre plus de 30 dollars américains/baril un an plus tard. L'OPEP décida alors d'augmenter la production avec comme objectif de stabiliser les prix entre 20 et 25 dollars américains/baril. Les prix redescendirent à nouveau à partir de décembre 2000 pour se stabiliser autour de 28 dollars américains.

• A la suite des attentats du 11 septembre 2001 une légère hausse a eu lieu, mais très rapidement, du fait d'une baisse de la demande en fuel d'aviation et des perspectives de stagnation de la croissance économique qui prévalaient jusqu'alors, les cours ont à nouveau plongé et l'OPEP a décidé de réduire sa production à partir de janvier 2002 à condition que les pays hors de l'OPEP contribuent également à cette réduction.

• Depuis le début des années 2000, le cours du pétrole a connu un niveau historique très élevé et une hausse constante depuis 2001. La moyenne des prix du pétrole a été de 18.5$ environ sur la période 1985-2000 alors que depuis 2000, celle-ci est de 41.6$" (2000-2007). Cette hausse très importante s'explique notamment par le dynamisme de l'économie chinoise et l'émergence de pays nouvellement industrialisés qui tendent à augmenter leur consommation d'énergie, ainsi que par l'amélioration des conditions économiques dans certaines régions du monde et en particulier aux États-Unis (qui se retrouvent de ce fait devoir faire face à une certaine tension au niveau des stocks nationaux). Les sous-jacents ne suffisent cependant pas à expliquer le développement des cours du pétrole sur les années 2003-2004. Ceux-ci ont, en effet, été également fortement influencés par des sur-réactions spéculatives en relation avec les perturbations potentielles au niveau de l'offre (évènements en Irak, par exemple) ou de la demande (faiblesse et baisse des stocks américains).

1. Afin d'ordonner les prix du document 2, on décide d'appeler p_0 le prix d'un libre d'essence en 2008, p_1 le prix en 2009, et ainsi de suite… Illustrer l'évolution de cette suite de prix à l'aide d'un nuage de points réalisé à l'aide d'un tableur.

2. Exploiter la représentation graphique de la suite des prix pour décrire certaines composantes du document 1, composantes que l'on expliquera à l'aide du document 3.

3. Afin d'observer une tendance générale, on décide de créer une nouvelle suite de prix (q_n) obtenue par lissage de moyennes mobiles.

Le principe de cette méthode est de construire une nouvelle suite obtenue en calculant des moyennes arithmétiques successives de longueur fixe à partir des données originales. Chacune de ces moyennes obtenues correspondra au "milieu" de la période pour laquelle la moyenne arithmétique vient d'être calculée.

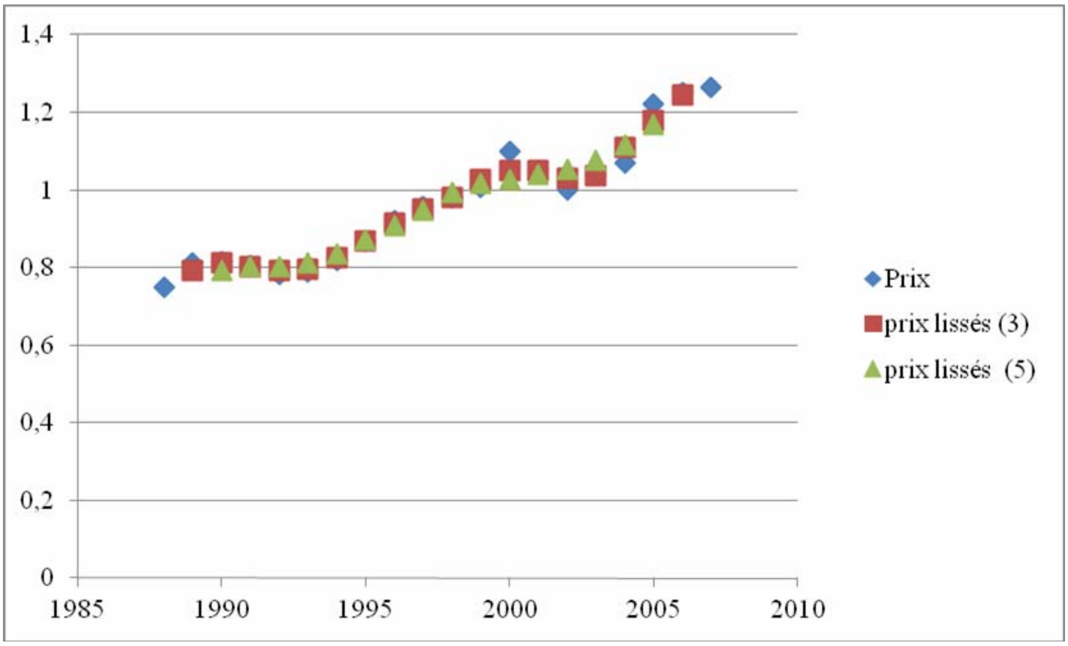
Par exemple :

Année	Rang	Termes	Prix	Prix lissés par moyennes mobiles de période 3
1988	0	p_0	0,749	
1989	1	p_1	0,813	La moyenne de période 3 est égale à : (0,749+0,813+0,813)/3=0,792
1990	2	p_2	0,816	0,811
1991	3	p_3	0,805	0,801
1992	…	…	0,784	…

Réaliser une telle feuille de calcul à l'aide d'un tableur. Ajouter une colonne avec la suite des prix lissés par moyennes mobiles de période 5 puis représenter graphiquement dans le même repère les trois suites de prix obtenues. Ces nouveaux graphiques permettent-ils de mieux mettre en correspondance certaines informations du document 3 ?

Commentaires :

Les élèves aboutissent à une représentation du type suivant :



On peut montrer aux élèves que le logiciel permet d'ajouter une courbe de tendance par moyennes mobiles directement par un clic droit sur le nuage de points de la suite initiale en précisant la période. On explique ainsi comment ont été réalisés les calculs du logiciel.

Exemple 2 : le grossiste en fleurs coupées

Comment aider un grossiste en fleurs coupées à harmoniser un peu ses prix pour éviter de trop fortes fluctuations lors de la revente de sa marchandise ?

Le tableau ci-dessous donne le prix d'achat HT moyen, en gros, d'une botte de 10 roses. Les prix sont relevés sur quatre périodes de chaque mois, de septembre 2009 à août 2010.

Périodes	Prix moyen d'une botte de roses par périodes (en euros)
Septembre	
1	1,82
2	2,02
3	2,63
4	2,27
Octobre	
5	2,23
6	2,36
7	2,61
8	3,01
Novembre	
9	3,81
10	3,01
11	2,92
12	2,93
Décembre	
13	3,82
14	4,01
15	4,22
16	5,82
Janvier	
17	4,51
18	4,52
19	5,13
20	4,57
Février	
21	5,01
22	12,08
23	5,04
24	6,02

Périodes	Prix moyen d'une botte de roses par période (en euros)
Mars	
25	6,03
26	5,04
27	4,11
28	3,53
Avril	
29	2,54
30	2,64
31	2,73
32	2,83
Mai	
33	2,84
34	3,04
35	4,11
36	3,81
Juin	
37	3,01
38	2,10
39	2,22
40	2,15
Juillet	
41	2,21
42	2,09
43	1,83
44	1,73
Août	
45	3,02
46	3,31
47	3,52
48	2,50

1. Illustrer l'évolution de cette suite de prix à l'aide d'un nuage de points réalisé à l'aide d'un tableur. Exploiter la représentation graphique de cette suite pour décrire certaines composantes économiques du cours de la botte de roses et les interpréter (mouvements saisonniers sur 12 mois, fêtes, coûts en énergie pour la production,…).

2. Le grossiste cherche à lisser davantage ses prix, sur la quinzaine, voire sur le mois. Proposer une stratégie permettant de l'aider.

3. Le grossiste s'octroie un taux de marge commerciale brute de 33,3% pour la revente. Le lissage des prix à la quinzaine ou au mois lui est-il favorable, défavorable ou sans effet ?

Jeux de nombres

De nombreux jeux de nombres, dont s'emparent facilement les élèves, génèrent des suites numériques. Captivants et synonymes de curiosité, ces jeux facilitent le développement des compétences pour la formation des élèves. L'activité présentée ci-dessous a pour but d'aborder les modes de génération d'une suite. Sans grande difficulté, elle permet aux élèves d'investir rapidement le sujet. Attrayante, elle apporte beaucoup en termes d'investigation tout en renforçant le calcul mental. Avant de se lancer dans la conjecture, les élèves observent différentes suites de nombres, ce qui leur permet de conceptualiser différentes natures de suites en les comparant. Cette activité permet aussi de favoriser l'oral. La partie algorithmique renforce le raisonnement et la logique.

Le travail demandé aux élèves est réalisé en deux temps :

1. Une lecture active de l'énoncé suivie d'une recherche individuelle. Le professeur accompagne l'élève dans son travail d'investigation, puis donne la parole aux élèves pour une analyse critique des résultats qu'ils ont proposés.
2. Dans un deuxième temps, l'activité sollicite une démarche algorithmique. Le professeur termine sa séance en demandant aux élèves d'écrire l'algorithme dans le langage de leur choix, de le programmer puis de le tester afin de valider les conjectures émises.

Problématiques développées : P2, P3, P6 et P7.
Série : toutes séries.
Place dans la progression : avant le cours sur les suites.

Objectifs pédagogiques	Approcher la notion de suites numériques, en variant les supports et les outils. Amener la notation indicielle des termes d'une suite.
Compétences	Mettre en œuvre une recherche de manière autonome. Mener des raisonnements. Avoir une attitude critique vis-à-vis des résultats obtenus.
Connaissances	Les notions d'algorithmique de la classe de seconde.
Modalités de gestion de classe	Travail individuel puis collectif. Utilisation de la calculatrice.

Énoncé de l'exercice

On considère le jeu de nombres suivant :

On choisit un nombre entier entre 1 et 99.
À chaque étape, on le remplace par la somme des carrés de ses chiffres.

Exemple : Je choisis n=7.

Étape 1: 49

Étape 2: 97…

1. Poursuivre la procédure pour n = 7.
2. Recommencer avec n = 4.
3. Faire un essai avec un autre entier de votre choix.
4. Comparer les résultats avec ceux obtenus par d'autres élèves de la classe.
5. Émettre une conjecture sur les suites de nombres obtenus.

6. Voici un algorithme :

```
Variables
        q, r, n et s
Entrée
        Saisir le nombre entier n
Traitement
        Affecter 0 à s
        Tant que n > 0
                q prend la partie entière de n/10
                r prend la valeur n – 10q
                s prend la valeur s + r^2
                n prend la valeur q
        Fin du Tant que
Sortie
                Afficher s
```

- Expliquer le rôle de cet algorithme.
- Compléter cet algorithme afin qu'il puisse valider la conjecture émise.

Évolution de cellules cancéreuses

Cette activité est tirée de documents écrits par Dominique Barbolosi (Université Paul Cézanne).

Problématiques développées : P2, P3 et P7..
Séries : toutes séries.
Place dans la progression : introduction de la notion de suite.

Objectifs pédagogiques	Résoudre un problème issu d'un phénomène discret. Utiliser les TICE.
Compétences	Mettre en œuvre une recherche de manière autonome. Avoir une attitude critique vis-à-vis des résultats obtenus. Communiquer à l'oral
Connaissances	Représentation graphique d'un nuage de points. Réaliser une feuille de calcul à l'aide du tableur.
Logiciels	Tableur, calculatrice, logiciel de programmation.
Modalités de gestion de classe	Activité en autonomie.

Tout cancer débute par la production d'une cellule cancéreuse. Au cours du temps, cette cellule va produire un ensemble de cellules filles appelé tumeur. On observe que le temps de doublement T d'une tumeur cancéreuse (c'est-à-dire le temps mis par une tumeur donnée pour doubler son nombre de cellules) est sensiblement constant et dépend du type de cancer. Ce temps de doublement peut être évalué sur des cellules prélevées dans la tumeur et mises en culture. Par exemple, pour un cancer du sein, T=14 semaines ; pour certains cancers du poumon T=21 semaines ; pour les cancers du colon et du rectum, T=90 semaines.

Évolution d'une tumeur sans traitement

On fait l'hypothèse qu'une cellule cancéreuse apparaît dans l'organisme d'un individu.
On cherche comment connaître le nombre de cellules cancéreuses qui composent une tumeur dont le temps de doublement T est connu à la fin de chaque période.

Modélisation

Voici deux schémas :

Schéma 1 :

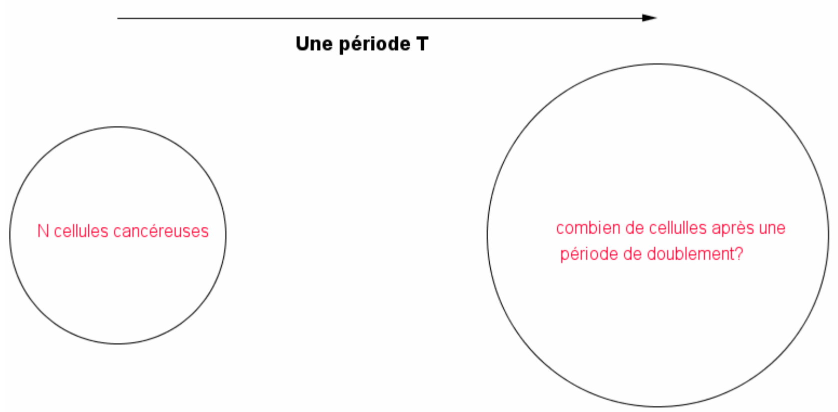
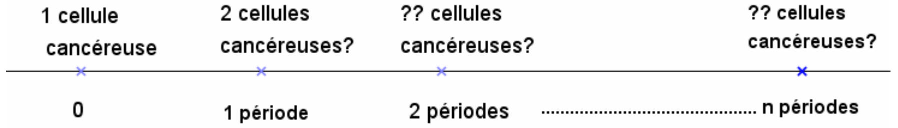


Schéma 2 :



1. À l'aide d'un tableur, réaliser et compléter la feuille de calcul suivante :

	A	B
1	période	nombre de cellules cancéreuses
2	0	1
3	1	2
4	2	4
5	3	
6	4	
7	5	
8	6	
9	7	
10	8	
11	9	
12	10	

2. À l'aide du tableur, représenter le nuage de points correspondant à l'évolution du nombre de cellules cancéreuses.

3. Compléter le tableau suivant :

Période	0	1	2	3	….	n périodes
Nombre de cellules cancéreuses	1	2	…	…	….	…
Nombre de cellules cancéreuses	u_0	u_1	…	…	….	u_n

Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre de cellules cancéreuses n période(s) après la naissance de la première cellule cancéreuse. On a donc $u_0 = 1$.

Pour tout entier naturel n, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

Remarque : cette situation peut également être exploitée pour introduire les suites géométriques, mais l'activité privilégie ici un mode de génération numérique et graphique.

<u>Découverte de la tumeur</u>

Actuellement, la plus petite tumeur cancéreuse détectable est constituée de 10^9 cellules, ce qui correspond à peu près à une tumeur d'une masse égale à 1 gramme.

Question : si on découvre aujourd'hui une tumeur ayant 10^9 cellules, peut-on savoir quand est apparue la première cellule cancéreuse ?

Méthode 1 : utiliser un tableur.

Méthode 2 : à l'aide d'un algorithme

```
Variables
        n, u
Initialisation
        n prend la valeur 0
        u prend la valeur 1
Traitement
        Tant que u < … Faire
                n prend la valeur n + 1
                u prend la valeur …
        Fin du Tant que
Sortie
                Afficher n
```

1. Compléter l'algorithme afin qu'il puisse donner une réponse à la question posée.
2. Coder l'algorithme complété à l'aide de la calculatrice, puis l'exécuter. Conclure.

Prolongements possibles

Piste 1

Après le traitement d'un cancer du sein (T=14 semaines), il est d'usage de surveiller la personne traitée sur une période de 5 ans. Sachant qu'un traitement chirurgical peut laisser en résidu indétectable une masse tumorale de 10^3 cellules, expliquer l'origine du choix de 5 ans comme période de surveillance d'un cancer du sein après traitement.

Piste 2

Pour le cancer du colon (T=90 semaines), on préconise un dépistage à partir de 50 ans. Un individu développe une cellule cancéreuse à l'âge de 20 ans. Le dépistage proposé est-il cohérent ? Justifier la réponse.

Population de pies bavardes

Nous allons, dans cette section, nous pencher sur une espèce d'oiseaux, la pie bavarde. C'est une population d'oiseaux très présente en Europe ainsi qu'en Amérique du Nord, surtout dans les provinces de l'Ouest. Il existe une grande population de pies bavardes en Alsace, région de l'est de la France, dans une grande réserve naturelle.

Partie A : Essais de modélisation

Problématiques développées : P2, P3 et P6
Séries : toutes séries.
Place dans la progression : après l'introduction de la notion de suite.

Objectifs pédagogiques	Modélisation à l'aide d'une suite géométrique.
Compétences	B2I lycée : le tableur. Rechercher de manière autonome. Mener des raisonnements. Avoir une attitude critique.
Connaissances	Modes de génération d'une suite. Courbe de tendance du tableur.
Logiciel	Tableur.
Modalités de gestion de classe	Travail de groupe.

Activité

Un groupe de biologistes a relevé pendant quatre ans, le premier janvier de chaque année depuis 2000, le nombre de pies vivant sur une île d'une superficie de 60 km^2.

Il a obtenu les résultats suivants :

Année	Population
2000	300
2001	270
2002	243
2003	220

Les mesures ont été stoppées pendant quelques années, puis ont repris en 2010. On comptait 105 pies sur l'île le premier janvier 2010.

1. Entrer les données dans une feuille de calcul.
2. Proposer une modélisation de la situation à l'aide d'une suite (p_n).
3. En utilisant ce modèle, quel serait la population en 2010 ?
4. Peut-on valider cette modélisation ?

Les biologistes ont admis que le nombre d'oiseaux diminuait de 10% chaque année, à cause des prédateurs et de la régulation des naissances et des décès.

Quelle est dans ce cas la nature de la suite (p_n) ?

Partie B : Premier modèle d'évolution - les biologistes n'interviennent pas.

Problématiques développées : P2, P3, P5, P6, P7 et P8.
Séries : toutes séries.
Place dans la progression : après l'introduction de la notion de suite.

Objectifs pédagogiques	Modélisation à l'aide d'une suite géométrique.
Compétences	B2I lycée : le tableur. Rechercher de manière autonome. Mener des raisonnements. Avoir une attitude critique.
Connaissances	Modes de génération d'une suite. Courbe de tendance du tableur. Les notions algorithmiques de la classe de seconde
Logiciels	Tableur, logiciel de programmation
Modalités de gestion de classe	Devoir à la maison et (ou) travail de groupe.

Fiche élève

Les deux questions posées à la classe sont :

- Comment évolue la population de pies ?
- En quelle année la population disparaît-elle de l'île si la situation perdure ?

Fiche professeur

Ces questions permettent de mettre en œuvre une démarche expérimentale.

Dans un premier temps, le travail est mené à l'aide d'un tableur.

Celui-ci permet de constater que la population décroît et de déterminer en quelle année cette espèce d'oiseaux aura disparu de l'île. On peut envisager d'utiliser une courbe de tendance.

Le recours à une méthode algorithmique dans un second temps, permet au professeur de proposer des énoncés différenciés, répondant aux besoins de chaque apprenant.

Énoncé 1

1. Interpréter l'algorithme ci-dessous.
2. Coder l'algorithme dans un langage de programmation et l'exécuter.
3. Interpréter le résultat affiché en sortie.

```
Initialisation
        pop ← 105
        n prend la valeur 0
Traitement
        Tant que pop >= 1 Faire
                pop ← pop × 0,9
                n ← n + 1
        Fin du Tant que
Sortie
                Afficher « la population aura disparu en 2010 + n »
```

Énoncé 2

1. Compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'il affiche en sortie l'année où la population aura disparu.
2. Coder l'algorithme dans un langage de programmation et l'exécuter.
3. Interpréter le résultat affiché en sortie.

```
Initialisation
        pop ← …
        n prend la valeur 0
Traitement
        Tant que pop >= 1 Faire
                pop ← …
                n ← …
        Fin du Tant que
Sortie
                Afficher « la population aura disparu en … »
```

Énoncé 3

1. Écrire un algorithme qui calcule et affiche en sortie l'année où la population aura disparu.
2. Coder l'algorithme dans un langage de programmation et l'exécuter.
3. Interpréter le résultat affiché en sortie.

Partie C : Deuxième modèle d'évolution - les biologistes interviennent.

Problématiques développées : P2, P3, P5, P6, P7 et P8.
Série : S.
Place dans la programmation : après la notion de suite géométrique et le sens de variation d'une suite.

Objectifs pédagogiques	Modélisation à l'aide d'une suite géométrique.
Compétences	Interpréter un algorithme. Compléter un algorithme. Modifier un algorithme. Émettre des conjectures. Mobiliser ses connaissances. Analyser de manière critique un document. Utiliser les quantificateurs.
Connaissances	Modes de génération d'une suite. Courbe de tendance du tableur.
Logiciels	Tableur, logiciel de programmation
Modalités de gestion de classe	Recherche par groupes, avec éventuellement une différenciation portant sur des questions plus ou moins détaillées selon les groupes.

Fiche élève

Pour tenter de modifier la situation, les biologistes décident d'installer un nombre a d'oiseaux de cette espèce le premier janvier de chaque année suivant l'année 2010.
Ils estiment que le risque d'extinction est évité si la population se stabilise autour de 200 oiseaux sur l'île.

1. Partie expérimentale

1.A. Modifier la feuille de calcul établie dans la partie B afin de tenir compte de ce changement.
On pourra noter la valeur de a dans une cellule particulière et on prendra ici $a = 5$.

1.B. Quelle conjecture peut-on émettre quant à l'évolution du nombre d'oiseaux vivant sur l'île ?

1.C. Les biologistes éviteraient-ils ainsi l'extinction de l'espèce ?

1.D. Reprendre les questions *a*., *b*. et *c*. avec les valeurs $a = 10$, $a = 20$ puis $a = 30$.

1.E. Combien doivent-ils installer au minimum d'oiseaux chaque année pour éviter l'extinction ?

1.F. Combien doivent-ils installer au minimum d'oiseaux chaque année pour que le nombre de pies vivant sur l'île retrouve au bout d'un certain nombre d'années sa valeur de l'an 2000 ?

2. Justification

Caroline a répondu correctement à la question 1.E, elle amorce une recherche supplémentaire avec le tableur. Un extrait de sa feuille de calcul est représenté ci-après.

Pour tout entier naturel n, on note q_n le nombre d'oiseaux vivant sur l'île le premier janvier $2010 + n$ lorsque les biologistes décident d'installer 20 oiseaux le premier janvier de chaque année suivant l'année 2010.

	A	B	C	D	E	
1	n	q_n	q_n-200	quotient	a=	20
2	0	105	-95	0,9		
3	1	114,5	-85,5	0,9		
4	2	123,05	-76,95	0,9		
5	3	130,75	-69,26			

2.A. Pour tout entier naturel n, exprimer q_{n+1} en fonction de q_n.

2.B. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = q_n - 200$.

2.C. Démontrer que la suite (u_n) est géométrique.
Exprimer alors, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de n.

3. Déduire de ce qui précède que, pour tout entier naturel n : $q_n = 200 - 95\times(0,9)^n$

4. Démontrer que la suite (q_n) est croissante.

5. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $q_n < 200$.

<u>Pour aller plus loin</u>

On se propose de déterminer le premier entier naturel n_0 tel que, pour tout entier naturel $n > n_0$, q_n appartienne à l'intervalle]199 ;200[.

Pierre propose à Caroline un algorithme ainsi que sa programmation en langage *Scilab* correspondante. Il affirme qu'en exécutant le programme, elle aura répondu à la question :

```
Initialisation
        n prend la valeur 0
        q ← 200 – 95×(0,9)^n
Traitement
        Tant que q < 199 Faire
                n ← n + 1
                q ← 200 – 95×(0,9)^n
        Fin du Tant que
Sortie
                Afficher la valeur de n0
```

```
n=0 ;
q=200-95*0.9^n ;
while q<=199
  n=n+1 ;
  q=200-95*0,9^n ;
end
afficher('la première valeur de n pour laquelle q_n est ..
compris strictement entre 199 et 200 est égale à '+string(n))
```

1. Interpréter cet algorithme.
2. Coder l'algorithme et l'exécuter.
3. Caroline dit alors à Pierre : « On obtient bien une valeur de n_0 pour laquelle q_{n_0} appartient à l'intervalle]199 ; 200[, mais pourquoi es-tu certain que pour les valeurs de n plus grandes que n_0 la propriété sera encore vérifiée ? ».
4. Répondre alors à la question de l'énoncé.
5. Modifier l'algorithme précédent afin qu'il détermine le premier entier naturel n0 tel que, pour tout entier naturel $n>n_0$, $q_n \in$]199,9 ; 200[.
Répondre à la même question avec $q_n \in$]199,99 ; 200[.
6. Modifier l'algorithme précédent afin qu'il détermine le premier entier naturel n_0 tel que, pour tout entier naturel $n>n_0$, $q_n \in$]200 – λ ; 200[, où λ est un réel strictement positif saisi en entrée à l'exécution de l'algorithme.

Que peut-on en déduire quant à la limite de q_n lorsque n tend vers + ∞ ?

<u>Fiche professeur</u>

La question sur le nombre minimal d'oiseaux à installer chaque année pour que le nombre de pies vivant sur l'île retrouve au bout d'un certain nombre d'années la valeur de l'an 2000 peut faire l'objet d'un problème ouvert dont il est possible de demander la démonstration.

Ce travail peut faire l'objet d'un exposé oral.

5. Accompagnement personnalisé

Cartes de jeux

Problématiques développées : P2, P3, P5, P6 et P7.
Série : série S.
Place dans la progression : tout au long de l'année.

Objectifs pédagogiques	Apprendre à chercher de façon ludique. Utiliser différents outils pour résoudre un problème. Mettre en commun différentes démarches de résolution. Privilégier le travail en groupes. Découvrir la spécialité mathématique en Terminale.
Compétences	Mettre en œuvre une recherche de façon autonome. Communiquer à l'oral. Prendre des initiatives.
Connaissances	Celles du programme de seconde ou de première.
Modalités de gestion de classe	Accompagnement Personnalisé.

Description du jeu de cartes

Chaque carte présente un problème court et ouvert, réclamant une réponse (qui peut-être multiple) numérique, approchée ou exacte. Pour résoudre ce problème, l'utilisation de l'informatique et/ou de l'algorithmique sont souvent nécessaires, utiles, mais quelques rares fois inutiles.

Les sujets des problèmes sont variés et couvrent la plus grande part possible du programme de 1ère S.

Les élèves construisent leur démarche en autonomie ; ils choisissent eux-mêmes les logiciels qu'ils comptent utiliser.

Les cartes sont classées suivant la difficulté de résolution :

Cartes vertes : Niveau élémentaire, pour être accessible à tous.
Cartes bleues : Niveau intermédiaire, pour atteindre une maîtrise des outils et des démarches.
Cartes rouges : Niveau supérieur, pour approfondir les démarches.
Cartes noires : Niveau très difficile, pour le plaisir du challenge.

Mises en œuvre possibles

Lors d'une séance, chaque élève prend une carte de la couleur de son choix. Il doit alors résoudre le problème qu'elle présente pour en choisir une autre, et ainsi de suite.
On peut aussi penser à une utilisation en classe entière, en travail en binôme, à la condition de disposer d'un ordinateur pour chaque groupe.

Les énoncés peuvent simplement servir de banque d'énoncés d'exercices utilisant l'outil informatique.

On peut enfin imaginer un concours entre deux classes (ou groupes) : chacune se voit remettre un paquet de cartes, le challenge consistant alors pour chaque classe à résoudre le maximum de cartes dans le temps imparti.

Remarques

La demande du professeur peut être de seulement donner la (ou les) réponse(s) exacte(s), ou bien un compte-rendu expliquant la démarche suivie. On peut imaginer une narration de recherche pour certaines des situations proposées.

Pour l'évaluation, chaque élève dispose d'une feuille de positionnement qui lui permet de se situer dans la maîtrise des outils informatiques.

Annexes

Fiche de suivi individuelle

NOM :

Prénom :

CLASSE :

	N°	Date de Validation	Signature	N°	Date de Validation	Signature
Cartes vertes	101			119		
	102			120		
	103			121		
	104			122		
	105			123		
	106			124		
	107			125		
	108			126		
	109			127		
	110			128		
	111			129		
	112			130		
	113			131		
	114			132		
	115			133		
	116			134		
	117			135		
	118			136		

	N°	Date de Validation	Signature	N°	Date de Validation	Signature
Cartes noires	401			406		
	402			407		
	403			408		
	404			409		
	405			410		

	N°	Date de Validation	Signature	N°	Date de Validation	Signature
Cartes bleues	201			217		
	202			218		
	203			219		
	204			220		
	205			221		
	206			222		
	207			223		
	208			224		
	209			225		
	210			226		
	211			227		
	212			228		
	213			229		
	214			230		
	215			231		
	216			232		

	N°	Date de Validation	Signature	N°	Date de Validation	Signature
Cartes rouges	301			313		
	302			314		
	303			315		
	304			316		
	305			317		
	306			318		
	307			319		
	308			320		
	309			321		
	310			322		
	311			323		
	312			324		

Les principales sources dont sont issus les problèmes

Torneo de Computación y Matemática (CyM), Argentine : www.oma.org.ar/nacional/cym/index.htm

Clubes Cabri, Argentine : www.oma.org.ar/cabri/index.htm

Le concours Alkhawarichti de l'APMEP Lille : http://defiapmep.free.fr/calculs/

Le projet Euler : http://eulerdz.toile-libre.org/index.php

Five hundred mathematical challenges (MAA)

L'épreuve expérimentale de mathématiques en terminale S (IREM Bordeaux)

Introduction de la notion de paramètre au lycée avec un logiciel de géométrie dynamique (IREM)

Bulletin vert (Exercices de-ci, de-là, APMEP)

Quelques exemples de cartes

101 1

Calculer

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2000}$$

à 10^{-3} près.

1 101

102 1

On appelle suite de Fibonacci la suite (F_n) définie par :

$$\begin{cases} F_0 = 0 \text{ et } F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \text{ pout tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Que vaut F_{30} ?

1 102

103 1

Trouver tous les couples d'entiers naturels $(a\ ,\ b)$ tels que

$$207a + 208b = 66935$$

1 103

104 1

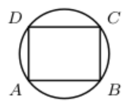
Trouver tous les couples d'entiers naturels $(a\ ,\ b)$ tels que $a \times b < 100$, et $3a^2 - b^2 + 4$ soit strictement positif et multiple de 77.

1 104

209 1

$ABCD$ est un rectangle inscrit dans un cercle de rayon 1. Quelle est la longueur du côté $[AB]$ sachant que $AB = \overset{\frown}{BC}$?

$\overset{\frown}{BC}$ désigne la longueur de l'arc de cercle entre B et C.



On donnera la réponse arrondie au centième.

1 209

210 1

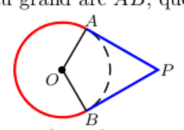
Dans l'addition ci-dessous, on a remplacé tous les chiffres par des lettres. Aucun nombre ne commence par 0. Des lettres différentes représentent des chiffres différents. Quelle est l'addition cachée ?

$$TEN + TEN + FORTY = SIXTY$$

1 210

211 1

Par P on a tracé deux tangentes à un cercle de rayon 1, de centre O. Les points de contacts sont A et B. Quand $AP + PB$ est égale au grand arc $\overset{\frown}{AB}$, que vaut OP ?



On donnera la réponse arrondie au dixième.

1 211

212 1

Trouver un entier naturel de cinq chiffres (tous non nuls), s'écrivant $ABCDE$, tels que $\dfrac{EABDC}{ABCDE}$ soit un nombre entier différent de 1.

Deux lettres différentes peuvent représenter le même chiffre.

1 212