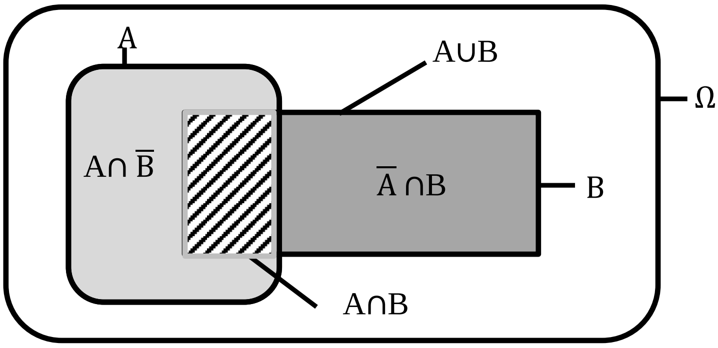
Extrait de cours 1

Théorème : Si A et B sont deux événements d'une expérience aléatoire alors :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$



Démonstration :

Les éléments de la réunion $A \cup B$ sont répartis dans trois sous-ensembles : ceux appartenant à A et à B ($A \cap B$), ceux appartenant à A mais pas à B ($A \cap \overline{B}$) et ceux appartenant à B mais pas à A ($\overline{A} \cap B$).

Ces trois sous-ensembles sont deux à deux disjoints donc $P(A \cup B) = P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$.

D'où $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) + P(A \cap B)$.

Or $A = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)$ avec $A \cap \overline{B}$ et $A \cap B$ disjoints.

Donc $P(A) = P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B)$.

De même, $P(B) = P(\overline{A} \cap B) + P(A \cap B)$.

D'où $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$.

Donc $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Extrait de cours 2

Propriété : Soit (O; I, J) un repère du plan. Soient (D) et (D') deux droites non parallèles à l'axe des ordonnées.

Dire que (D) et (D') sont parallèles équivaut à dire qu'elles ont le même coefficient directeur.

Démonstration :

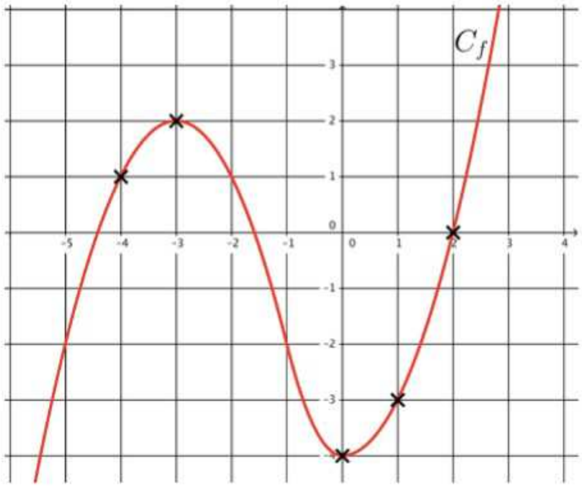
La droite (D) admet une équation du type $y = a x + b$.

La droite (D') admet une équation du type $y = a' x + b'$.

Dire que les droites (D) et (D') sont parallèles équivaut à dire que leurs vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}(1 ; a)$ et $\vec{v}(1 ; a')$ sont colinéaires, c'est-à-dire que $a=a'$.

Activité 1

Exercice 1



On considère la suite (u_n) dont le premier terme est $u_0 = -3$ et qui est définie par la relation de récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier *n*.
Sachant que la courbe représentative de la fonction *f* définie sur l'ensemble des nombres réels est donnée ci-contre, déterminer la valeur de u_{2017}.

Exercice 2

Modéliser chaque situation par une suite dont on calculera les trois premiers termes.

Situation 1 :
Aujourd'hui, les chardons ont colonisé 300 m^2 d'un jardin. Chaque semaine, l'aire de la surface envahie augmente de 4 % par développement des racines à laquelle s'ajoutent 13 m^2 dus à la dissémination des graines.

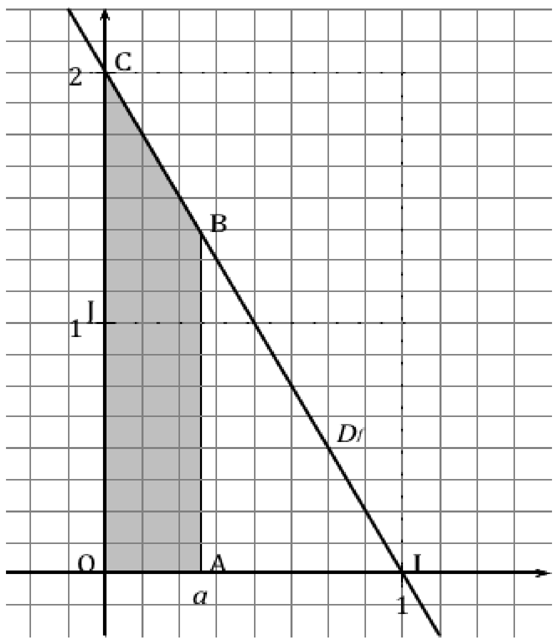
Situation 2 :
Chaque terme est égal au produit de son rang par le carré du terme qui le précède.
Le terme de rang 0 est 3.

Situation 3 :
On a l'algorithme suivant :

Variables	*n* est un entier naturel *u* est un réel positif
Initialisation	Demander la valeur de *n* Affecter à *u* la valeur 1
Traitement	Pour *i* variant de 1 à *n* Affecter à *u* la valeur $\sqrt{2u}$ Fin de Pour
Sortie	Afficher *u*

Activité 2

Soit *f* la fonction définie sur $[0;1]$ par : $f(x) = 2 - 2x$.
On a tracé ci-contre la droite *Df*, représentation graphique de la fonction *f* dans un repère orthonormé (O, I, J) du plan. Le point C a pour coordonnées $(0;2)$.
Δ est la partie du plan intérieure au triangle OIC.
Soit *a* un nombre réel compris entre 0 et 1. On note A le point de coordonnées $(a;0)$ et B le point de *D* de coordonnées $(a;f(a))$.
Le but de cet exercice est de trouver la valeur de *a*, telle que le segment $[AB]$ partage Δ en deux parties de même aire.
Déterminer la valeur de *a*.



Activité 3

1. Construction

On considère un parallélogramme ABCD de centre O et un point M situé à l'extérieur de ce parallélogramme.
Construire les points N et P tels que les quadrilatères AMDN et AMPB soient des parallélogrammes.
On utilisera un logiciel de géométrie dynamique.

2. Conjectures

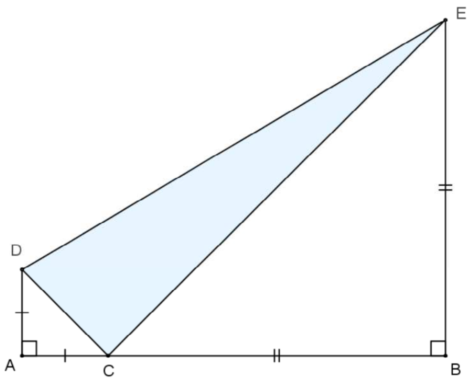
- **a)** Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{DN}$ et $\overrightarrow{PB}$?
- **b)** Que peut-on dire de la position des points N, O et P ?

3. Démonstrations

- **a)** Démontrer la conjecture formulée au 2.a).
- **b)** Démontrer la conjecture formulée au 2.b).

Activité 4

Sur la figure ci-contre, on considère un segment $[AB]$ de longueur 6 cm et C un point du segment $[AB]$, distinct de A et de B. Les triangles ACD et CBE sont isocèles rectangles respectivement en A et B.
On s'intéresse aux variations de l'aire du triangle CDE lorsque le point C se déplace de A vers B.



1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, construire la figure.

2. En déplaçant le point C, conjecturer les variations de l'aire du triangle CDE lorsque C se déplace de A vers B. Où se trouve le point C ?

3. On considère un repère orthonormé du plan, un point M ayant pour abscisse la longueur AC et pour ordonnée l'aire du triangle CDE.
Afficher la trace du point M lorsque C décrit le segment $[AB]$.

4. Afficher l'aire du trapèze ABED. Que peut-on conjecturer quand C se déplace sur le segment $[AB]$?

5. On pose $x = AC$. On note $g(x)$ l'aire du trapèze ABED et $f(x)$ l'aire du triangle CDE.

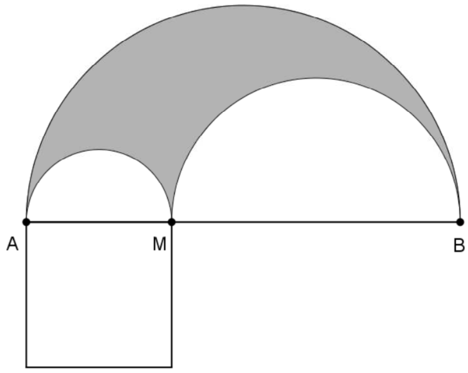
6. **a)** Calculer $g(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[0;6]$.

b) Montrer que : $f(x) = -x^2 + 6x$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[0;6]$.

c) Prouver alors les conjectures formulées à la question **2.**

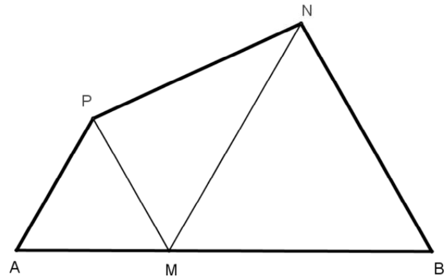
Activité 5 (seconde)

On considère un segment $[AB]$ et on choisit un point M sur ce segment, distinct de A et de B. Comme sur la figure ci-contre, on construit un demi-cercle de diamètre $[AB]$, un demi-cercle de diamètre $[AM]$, un demi-cercle de diamètre $[BM]$ d'un côté de la droite (AB) et un carré de côté AM de l'autre côté.
Peut-on choisir le point M de telle sorte que l'aire de la surface grisée soit égale à l'aire du carré ?



Activité 6 (première)

Soient un segment $[AB]$ de longueur 10 cm et M un point de $[AB]$ distinct de A et de B. Du même côté de la droite (AB), on construit deux triangles équilatéraux AMP et MBN.
Déterminer la position du point M pour laquelle l'aire du quadrilatère ABNP est minimale.



Activité 7 (première)

Deux cargos suivent des routes rectilignes et perpendiculaires. Ils avancent à la même vitesse en direction du point de croisement de leurs routes.
Quand le premier est encore à 10 km du point de croisement de leurs routes, l'autre est à 8 km de ce point.
Il y a de la brume et la visibilité n'excède pas 1,3 km !
Pourront-ils se voir à un moment de leurs parcours ?

Activité 8 (terminale)

On considère la suite (u_n) définie de la manière suivante :

$$u_0 = 7 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 10u_n - 18 .$$

Déterminer, pour tout entier naturel *n*, l'expression de u_n en fonction de *n*.

Activité 9 (terminale)

Soient *f* et *g* les fonctions définies sur **R** par $f(x) = \mathrm{e}^{x}$ et $g(x) = \mathrm{e}^{-x}$.
On note :

- C_f et C_g leurs courbes représentatives dans un repère orthonormé du plan ;
- a un réel quelconque ;
- M le point de C_f d'abscisse a et N le point de C_g d'abscisse a ;
- D la tangente à C_f en M et Δ la tangente à C_g en N ;
- P et Q les points d'intersection respectifs de D et Δ avec l'axe des abscisses.

Conjecturer et démontrer une propriété des droites D et Δ ainsi qu'une propriété de la distance PQ.