ACADÉMIE DE DIJON
Liberté
Égalité
Fraternité

Mathématiques terminales

Spécialité et Complémentaire

Sommes infinies ?

(fiche enseignant)

23-24 TraAM Mathématiques

Prérequis

1. Formule des expressions des sommes de termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique.
2. Limite d'une suite,
3. La suite de terme générale $(-1)^n$ n'a pas de limite.

Pour les compléments :

1. Fonction et Boucles en Python
2. Propriété des intégrales.

Objectifs

Dans ce scénario, il s'agit d'interroger la notion de somme infinie afin de constater :

— **Biais d'ancrage :** On parle de somme ce qui induit les élèves à accepter l'utilisation des propriétés des sommes finies : commutativité, distributivité...

— **Biais d'autorité :** C'est l'enseignant qui propose les stratégies pour déterminer les valeurs des sommes infinies proposées.

Scenario principal

Pour le scénario principal, il est possible de s'appuyer sur les diaporamas fournis (en pdf, ou en codiMD : `https://codimd.apps.education.fr/p/GMiO4VFTO#`).

1. On propose aux élèves trois "sommes infinies" sur lesquelles on se propose de travailler :
   - $A = 1-1+1-1+1-\ldots$
   - $B = 1-2+3-4+5-\ldots$
   - $S = 1+2+3+4+5+\ldots$
2. Puis successivement, on propose de déterminer les valeurs de A, B et S, en proposant les calculs suivants :

   On remarque qu'en réorganisant les termes de la somme
   $A = 1-1+1-1+1-\ldots = 1-(1-1+1-1+1-\ldots) = 1-A$
   Donc $A+A=1$ i.e. $2A=1$ ainsi $A=\frac{1}{2}$

   On remarque qu'en faisant la différence terme à terme, on a :
   $$\begin{array}{rcccc} B-A= & 1-2 & +3-4 & +5-6 & \ldots \\ & -1+1 & -1+1 & -1+1 & \ldots \\ = & 0-1 & +2-3 & +4-5 & \ldots \end{array}$$
   $B-A=-B$
   Donc $2B=A=\frac{1}{2}$ ainsi $B=\frac{\frac{1}{2}}{2}=\frac{1}{4}$

   On remarque qu'en faisant la différence terme à terme :
   $$\begin{array}{rcccc} S-B= & 1+2 & +3+4 & +5+6 & \ldots \\ & -1+2 & -3+4 & -5+6 & \ldots \\ = & 0+4 & +0+8 & +0+12 & \ldots \end{array}$$
   $S-B=4(1+2+3+\ldots)=4S$ Donc $S-4S=B$
   i.e. $-3S=B$ d'où $S=-\frac{B}{3}=-\frac{\frac{1}{4}}{3}$
   Ainsi, on trouve :
   $S=-\frac{1}{12}$

   À chaque fois, on laisse aux élèves le soin de résoudre l'équation que l'on a fait émerger puis on laisse après chaque proposition, un temps pour réagir aux élèves. Aux objections des élèves sur les valeurs obtenues, on peut proposer qu'ils expliquent où il y a une erreur dans la démarche proposée.
3. Après les échanges successifs sur les trois propositions, on revient sur la somme A, en procédant à des sommations par paquets :
   $$A = \underbrace{1-1}_{0} + \underbrace{1-1}_{0} + \underbrace{1-1}_{0} + \ldots = 0+0+0+\ldots$$
   Donc $A=0$
   $$A = 1 + \underbrace{-1+1}_{0} + \underbrace{-1+1}_{0} + \underbrace{-1+1}_{0} \ldots = 1+0+0+0\ldots$$
   Donc $A=1$
   Ceci amène d'autres propositions de valeurs pour A, et donc nourrit la réflexion en prouvant qu'il y a nécessairement une erreur.
4. **Analyse critique :** Pour mener cette analyse sur les propositions fournies, on peut interroger les élèves sur le sens que l'on donne à ses sommes infinies, puis on introduit la suite des sommes des n premiers termes et demander aux élèves et on demande quel lien peut-on faire entre cette suite et la somme infinie correspondante. Celui permet de faire émerger une définition des sommes infinies comme limite de la suite des sommes partielles.
5. On propose aux élèves d'étudier une nouvelle "somme infinie" $P = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\ldots.$ à l'aide de la définition posée. On justifie ainsi que $P=\frac{3}{2}$.

6. En fin d'activité, on peut s'interroger sur la commutativité des termes de P en proposant de commencer par les termes négatifs : Est-ce que cela change la limite ? Quand traitera-t-on les termes positifs ?

Compléments de l'activité principale
Activité Capytale :
Cette activité est en ligne dans la bibliothèque de Capytale :

http://capytale2.ac-paris.fr/web/b/3632467.

(**Nota bene :** Il faut cliquer sur le lien pour visualiser cette activité, puis il faudra copier cette activité pour récupérer une copie de cette activité dans vos activités et pouvoir rendre l'activité partageable avec vos classes.

Cette activité Capytale prolonge, en classe ou à la maison, le travail mené sur les "sommes infinies" en proposant de déterminer des valeurs d'une nouvelle somme "infinie" : $R = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$...., puis de retrouver les valeurs de P et R à l'aide d'un algorithme programmé en Python. Puis on utilise cette stratégie pour conjecturer les valeurs $S = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9}$.... et de $T = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ...$
On s'interroge ensuite sur la possibilité de conjecturer si une somme infinie converge ou non à l'aide de cet algorithme en proposant comme somme infinie $H = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + ...$

Exercice pour prolonger l'activité principale
On propose un exercice pour démontrer que la suite des sommes partielles h_n de H diverge vers $+\infty$.