

**OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES
CLASSE DE PREMIÈRE**

SESSION 2012

SUJET RÉSERVÉ AUX CANDIDATS DE LA SÉRIE S

DURÉE : 4 heures.

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.

Les quatre exercices sont indépendants. Les calculatrices sont autorisées.

Recommandations :

- *Il est important d'argumenter les affirmations.*
- *Même si la solution n'est pas complètement aboutie, le candidat est invité à décrire sa démarche ; un résultat, même partiel, sera valorisé.*

EXERCICE 1 (National) – NOMBRES « DIGISIBLES »

On dit qu'un nombre entier est *digisible* lorsque les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- aucun de ses chiffres n'est nul ;
- il s'écrit avec des chiffres tous différents ;
- il est divisible par chacun d'eux.

Par exemple,

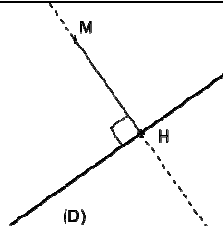
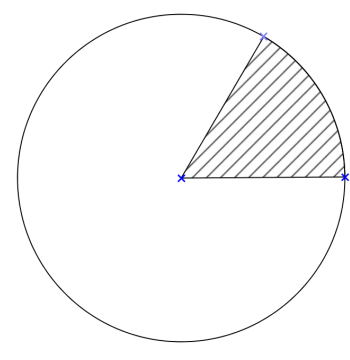
- 24 est *digisible* car il est divisible par 2 et par 4 ;
- 324 est *digisible* car il est divisible par 3, par 2 et par 4 ;
- 32 n'est pas *digisible* car il n'est pas divisible par 3.

On rappelle qu'un nombre entier est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

1. Proposer un autre nombre *digisible* à deux chiffres.
2. Proposer un nombre *digisible* à quatre chiffres.
3. Soit n un entier *digisible* s'écrivant avec un 5.
 - a) Démontrer que 5 est le chiffre de ses unités.
 - b) Démontrer que tous les chiffres de n sont impairs.
 - c) Démontrer que n s'écrit avec au plus quatre chiffres.
 - d) Déterminer le plus grand entier *digisible* s'écrivant avec un 5.
4. Soit n un entier *digisible* quelconque.
 - a) Démontrer que n s'écrit avec au plus sept chiffres.
 - b) Si n s'écrit avec sept chiffres, dont un 9, déterminer les chiffres de n .
 - c) Déterminer le plus grand entier *digisible*.

EXERCICE 2 (National) – POINTS ALÉATOIRES DANS UNE FIGURE

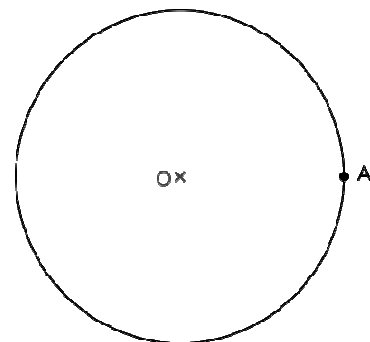
Rappels

<ul style="list-style-type: none"> On appelle distance entre un point M et une droite (D) la distance MH, où H est le point d'intersection de (D) avec la droite perpendiculaire à (D) passant par M. 	
<ul style="list-style-type: none"> Dans la figure ci-contre, si le rayon du disque est R, et si l'angle du secteur angulaire grisé mesure α (en degrés), alors l'aire de la portion de disque hachurée vaut $\frac{\pi R^2 \alpha}{360}$. <p>Dans la partie II de l'exercice, on considèrera la distance d'un point M à un segment [BC] comme étant la distance du point M à la droite (BC).</p>	

Partie I

Soit (C) un cercle de centre O, A un point de ce cercle et (D) le disque délimité par ce cercle.

- Reproduire la figure, et représenter l'ensemble des points du disque équidistants de O et de A.
- Hachurer l'ensemble des points du disque plus proches de O que de A.
- Soit M un point déterminé aléatoirement de manière équiprobable sur la surface du disque D. Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que de A ?

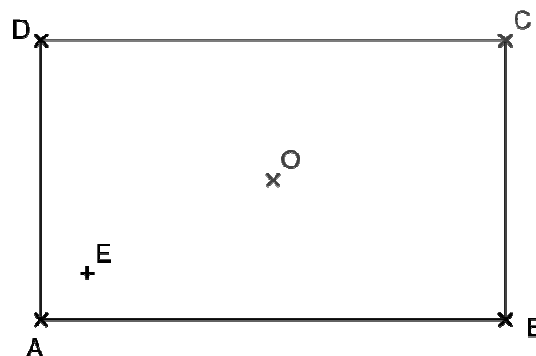


Partie II

Soit ABCD un rectangle de longueur AB = 20 cm et de largeur BC = 12 cm, de centre O.

Soit E un point situé à l'intérieur du rectangle, proche de A, à 2 cm de chaque bord (comme sur la figure ci-après, qui n'est toutefois pas à l'échelle).

Soit M un point déterminé aléatoirement de manière équiprobable à l'intérieur du rectangle ABCD.



- Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [BC] que du côté [AD] ?

2. a) Reproduire le rectangle, et représenter l'ensemble des points intérieurs au rectangle et équidistants des côtés [AB] et [BC].
 b) Hachurer l'ensemble des points intérieurs au rectangle et plus proches du côté [BC] que du côté [AB].
 c) Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [BC] que du côté [AB] ?
3. Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [AB] que des trois autres côtés [BC], [CD] et [DA] ?
4. Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que de E ?
5. Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que des quatre sommets A, B, C et D ?

EXERCICE 3 (Académique) – LE TOUR DE MAGIE

On se propose d'étudier le tour d'illusionniste suivant.

Le magicien demande à un spectateur de choisir un nombre d'au moins trois chiffres et de lui donner le reste de la division euclidienne par 9 de ce nombre. Il lui demande ensuite d'éliminer secrètement un des chiffres (non nul) du nombre choisi, de diviser le nombre obtenu par 9 et de lui communiquer le reste. Le magicien annonce alors le chiffre qui a été supprimé.

Le magicien utilise l'algorithme suivant :

- si les deux restes sont égaux, le chiffre supprimé est le 9 ;
- si le second reste est inférieur au premier, le chiffre supprimé est la différence des deux restes ;
- sinon, le chiffre supprimé est la somme du premier reste et de 9, à laquelle on retranche le second reste.

1. Émile choisit le nombre 2012. Il décide de supprimer le 1. Décrire le déroulement du tour de magie dans ce cas en détaillant les calculs.
2. Émile choisit un nombre à quatre chiffres dont le reste de sa division par 9 est 6 :
 - lorsqu'il supprime le chiffre des milliers, il obtient 4 comme second reste ;
 - lorsqu'il supprime le chiffre des centaines, il obtient 1 comme second reste ;
 - lorsqu'il supprime le chiffre des dizaines, il obtient 6 comme second reste ;
 - lorsqu'il supprime le chiffre des unités, il obtient 7 comme second reste.
 Quel est le nombre choisi par Émile ?
3. Pourquoi le magicien demande-t-il au spectateur de ne pas supprimer un zéro dans le nombre qu'il a choisi ? On pourra illustrer la réponse à l'aide d'un exemple.
4. Démontrer, pour un nombre à trois chiffres, l'affirmation suivante :
 « Lorsque l'on divise un nombre par 9, le reste obtenu est le même que lorsque l'on divise la somme des chiffres de ce nombre par 9. »

On admet désormais que ce résultat reste valable pour tout nombre entier.

5. Démontrer que pour un nombre de trois chiffres, l'algorithme du magicien renvoie toujours le bon résultat.

EXERCICE 4 (Académique) – DRÔLE DE DISTANCE

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on trace toutes les droites d'équation $x = m$ et $y = n$ pour tous les entiers relatifs m et n , et on considère le réseau formé de tous leurs points d'intersection. Ce réseau est donc constitué de tous les points du plan ayant des coordonnées entières. On définit la distance entre deux points A et B du réseau comme la plus courte distance reliant ces deux points, si l'on suit les lignes tracées. On la note $d(A, B)$.

On considère les points $O(0,0)$, $A(8,0)$, $B(3,3)$, $C(2,-4)$.

1. Quelques généralités

- Vérifier que $d(A, B) = 8$, puis calculer les autres distances mutuelles entre les points O, A, B, C.
- Si $M(x, y)$ et $N(x', y')$ sont deux points du réseau, exprimer $d(M, N)$ en fonction de x , x' , y , y' . En déduire que la distance entre deux points du réseau est un nombre entier.
- Soit M, N et P trois points du réseau. Montrer que parmi les trois nombres $d(M, P)$, $d(P, N)$ et $d(M, N)$:
 - soit il y a trois nombres pairs ;
 - soit il y a un nombre pair et deux nombres impairs.

2. Cercle

Si I est un point du réseau et r un entier strictement positif, le cercle de centre I et de rayon r est l'ensemble des points M du réseau tels que $d(I, M) = r$. On le note $c(I, r)$.

- Montrer que les points B et C appartiennent à $c(O, 6)$, puis représenter ce cercle.
- Combien de points y a-t-il sur un cercle de rayon r ?

3. Médiatrice d'un segment

Soient I et J deux points du réseau. La médiatrice du segment [IJ] est l'ensemble des points M du réseau tels que $d(M, I) = d(M, J)$.

- Dessiner les points de la médiatrice du segment [OA] dont l'ordonnée est comprise entre -6 et 6 .
- Dessiner les points de la médiatrice du segment [AC] dont l'ordonnée est comprise entre -8 et 4 .
- Dessiner les points de la médiatrice du segment [OB] dont l'abscisse et l'ordonnée sont comprises entre -3 et 6 .
- Que peut-on dire de la médiatrice du segment [IJ] si $d(I, J)$ est impair ?