OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES
CLASSE DE PREMIÈRE

SESSION 2012

SUJET RÉSERVÉ AUX CANDIDATS DES SÉRIES AUTRES QUE LA SÉRIE S

DURÉE : 4 heures.

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.
Les quatre exercices sont indépendants. Les calculatrices sont autorisées.
Recommandations :

- *Il est important d'argumenter les affirmations.*
- *Même si la solution n'est pas complètement aboutie, le candidat est invité à décrire sa démarche ; un résultat, même partiel, sera valorisé.*

EXERCICE 1 (National) – NOMBRES « DIGISIBLES »

On dit qu'un nombre entier est *digisible* lorsque les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- aucun de ses chiffres n'est nul ;
- il s'écrit avec des chiffres tous différents ;
- il est divisible par chacun d'eux.

Par exemple,

- 24 est *digisible* car il est divisible par 2 et par 4 ;
- 324 est *digisible* car il est divisible par 3, par 2 et par 4 ;
- 32 n'est pas *digisible* car il n'est pas divisible par 3.

On rappelle qu'un nombre entier est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

1. Proposer un autre nombre *digisible* à deux chiffres.

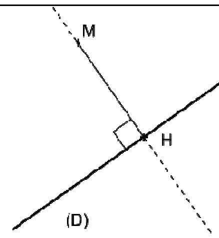
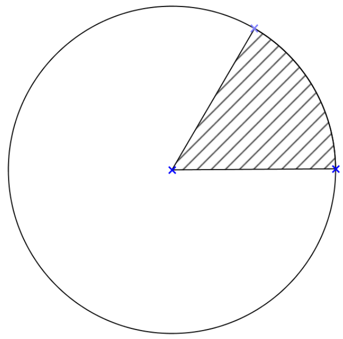
2. Proposer un nombre *digisible* à quatre chiffres.

3. Soit n un entier *digisible* s'écrivant avec un 5.
  a) Démontrer que 5 est le chiffre de ses unités.
  b) Démontrer que tous les chiffres de n sont impairs.
  c) Démontrer que n s'écrit avec au plus quatre chiffres.
  d) Déterminer le plus grand entier *digisible* s'écrivant avec un 5.

4. Soit n un entier *digisible* quelconque.
  a) Démontrer que n s'écrit avec au plus sept chiffres.
  b) Si n s'écrit avec sept chiffres, dont un 9, déterminer les chiffres de n.
  c) Déterminer le plus grand entier *digisible*.

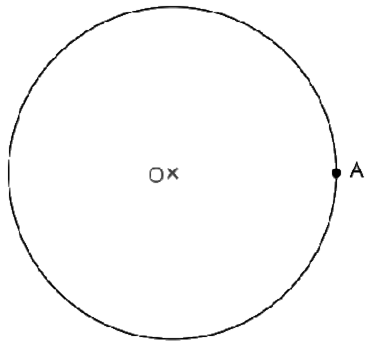
EXERCICE 2 (National) – POINTS ALÉATOIRES DANS UNE FIGURE

Rappels

• On appelle **distance entre un point M et une droite (*D*)** la distance MH, où H est le point d’intersection de (*D*) avec la droite perpendiculaire à (*D*) passant par M.	
• Dans la figure ci-contre, si le rayon du disque est *R*, et si l’angle du secteur angulaire grisé mesure α (en degrés), alors **l’aire de la portion de disque** hachurée vaut $\dfrac{\pi R^2 \alpha}{360}$. Dans la partie II de l’exercice, on considèrera la distance d’un point M à **un segment [BC]** comme étant la distance du point M à la droite (BC).	

Partie I

Soit (*C*) un cercle de centre O, A un point de ce cercle et (*D*) le disque délimité par ce cercle.



1. Reproduire la figure, et représenter l’ensemble des points du disque équidistants de O et de A.

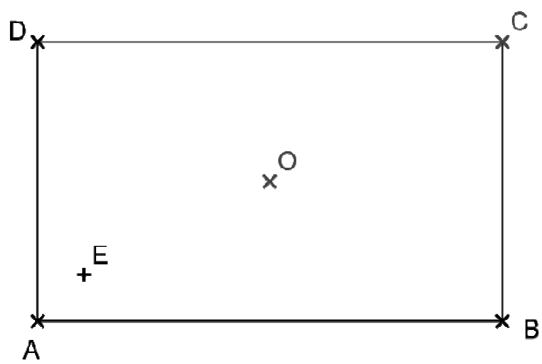
2. Hachurer l’ensemble des points du disque plus proches de O que de A.

3. Soit M un point déterminé aléatoirement de manière équiprobable sur la surface du disque D. Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que de A ?

Partie II

Soit ABCD un rectangle de longueur AB = 20 cm et de largeur BC = 12 cm, de centre O.
Soit E un point situé à l’intérieur du rectangle, proche de A, à 2 cm de chaque bord (comme sur la figure ci-après, qui n’est toutefois pas à l’échelle).

Soit M un point déterminé aléatoirement de manière équiprobable à l’intérieur du rectangle ABCD.



1. Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [BC] que du côté [AD] ?

2. **a)** Reproduire le rectangle, et représenter l'ensemble des points intérieurs au rectangle et équidistants des côtés [AB] et [BC].
   b) Hachurer l'ensemble des points intérieurs au rectangle et plus proches du côté [BC] que du côté [AB].
   c) Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [BC] que du côté [AB] ?

3. Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [AB] que des trois autres côtés [BC], [CD] et [DA] ?

4. Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que de E ?

5. Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que des quatre sommets A, B, C et D ?

EXERCICE 3 (Académique) – LE TOUR DE MAGIE

On se propose d'étudier le tour d'illusionniste suivant.
Le magicien demande à un spectateur de choisir un nombre d'au moins trois chiffres et de lui donner le reste de la division euclidienne par 9 de ce nombre. Il lui demande ensuite d'éliminer secrètement un des chiffres (non nul) du nombre choisi, de diviser le nombre obtenu par 9 et de lui communiquer le reste. Le magicien annonce alors le chiffre qui a été supprimé.

Le magicien utilise l'algorithme suivant :
- si les deux restes sont égaux, le chiffre supprimé est le 9 ;
- si le second reste est inférieur au premier, le chiffre supprimé est la différence des deux restes ;
- sinon, le chiffre supprimé est la somme du premier reste et de 9, à laquelle on retranche le second reste.

1. Émile choisit le nombre 2012. Il décide de supprimer le 1. Décrire le déroulement du tour de magie dans ce cas en détaillant les calculs.

2. Émile choisit un nombre à quatre chiffres dont le reste de sa division par 9 est 6 :
   - lorsqu'il supprime le chiffre des milliers, il obtient 4 comme second reste ;
   - lorsqu'il supprime le chiffre des centaines, il obtient 1 comme second reste ;
   - lorsqu'il supprime le chiffre des dizaines, il obtient 6 comme second reste ;
   - lorsqu'il supprime le chiffre des unités, il obtient 7 comme second reste.

   Quel est le nombre choisi par Émile ?

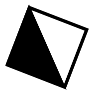
3. Pourquoi le magicien demande-t-il au spectateur de ne pas supprimer un zéro dans le nombre qu'il a choisi ? On pourra illustrer la réponse à l'aide d'un exemple.

4. Démontrer, pour un nombre à trois chiffres, l'affirmation suivante :
   « Lorsque l'on divise un nombre par 9, le reste obtenu est le même que lorsque l'on divise la somme des chiffres de ce nombre par 9. »

   On admet désormais que ce résultat reste valable pour tout nombre entier.

5. Démontrer que pour un nombre de trois chiffres, l'algorithme du magicien renvoie toujours le bon résultat.

EXERCICE 4 (Académique) – PAVAGE BICOLORE

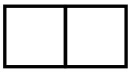


Pour paver une surface, on dispose de carreaux de faïence carrés, tous identiques : chaque carreau est séparé par une diagonale en deux moitiés, l'une est noire, l'autre blanche (figure ci-contre).
Sur un emplacement parallèle aux bords de la feuille, il y a donc quatre façons de disposer un carreau :

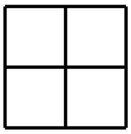
Disposition 1 Disposition 2 Disposition 3 Disposition 4

Pour les assembler, le carreleur a pour consigne de **ne jamais mettre l'un contre l'autre un côté noir d'un carreau et un côté blanc d'un autre carreau**. Cette consigne doit être respectée dans les questions suivantes.

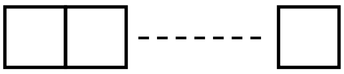
1. Représenter sur un dessin toutes les façons qu'a le carreleur de disposer les deux carreaux sur la surface suivante (1 ligne, 2 colonnes) : **(*)**



2. De combien de façons le carreleur peut-il placer 4 carreaux sur la surface suivante (2 lignes, 2 colonnes) ? **(*)**

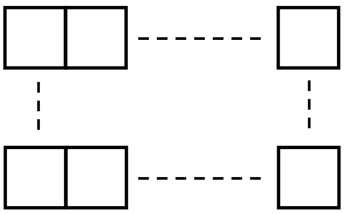


3. De combien de façons le carreleur peut-il placer les carreaux pour une frise de 2012 carreaux sur la surface suivante (1 ligne, 2012 colonnes) ? **(*)** Vérifier que le résultat peut s'écrire sous forme d'une puissance de 2.



(2012 carrés analogues)

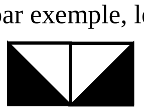
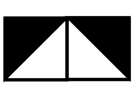
4. Le carreleur doit placer 320 carreaux sur la surface rectangulaire suivante, comprenant 16 lignes et 20 colonnes.



(16 lignes, 20 colonnes)

a) De combien de façons peu-il carreler cette surface ? **(*)**

b) Si l'on impose la contrainte supplémentaire que le bord de la surface soit entièrement blanc, de combien de façons peut-il carreler la surface ? **(*)**

(*) Dans chaque question, on considère que la surface est fixe, orientée comme sur la feuille, et ne peut pas subir une rotation. Ainsi par exemple, les deux dispositions suivantes sur une surface à 1 ligne et 2 colonnes sont considérées distinctes :  et  .