OLYMPIADES 2013 – ACADEMIE DE DIJON –
Éléments de solution pour les exercices nationaux et académiques

Exercice 1 – National – Les nombres Harshad

1.a) Notons $s(n)$ la somme des chiffres d'un entier *n*.

On a $s(364)=13$ et 364 est bien divisible par 13 car $364=13\times 28$.

1.b) Le plus petit entier est 11, qui n'est pas divisible par $s(11)=2$.

2.a) 1000 par exemple.

2.b) 10^{n-1} est un nombre Harshad de *n* chiffres.

3.a) C'est immédiat.

3.b) 1010, 1011 et 1012 sont trois nombres Harshad consécutifs.

3.c) À partir de la liste 110, 111, 112, et en intercalant *n* zéros après le 1 situé à gauche, on obtient une liste de trois nombres Harshad consécutifs de $n+3$ chiffres. En faisant varier *n*, on en obtient donc une infinité.

4.a) $s(A)=s(982\,080)=27$.

4.b) D'où $s(98208030)=30$, $s(98208031)=31$, $s(98208032)=32$, $s(98208033)=33$.

Or $98208030=100A+30=30\times(100\times 31\times 32\times 33+1)$,

$98208031=100A+31=31\times(100\times 30\times 32\times 33+1)$,

$98208032=100A+32=32\times(100\times 30\times 31\times 33+1)$,

$98208033=100A+33=33\times(100\times 30\times 31\times 32+1)$.

Ces quatre nombres sont consécutifs et de Harshad.

4.c) Une méthode : on intercale autant de zéros que l'on veut dans les nombres précédents, après la séquence 982080.

5.a) Soit $B=30\times 31\times 32\times 33\times 34=33390720$. $s(B)=27$.

Les nombres $100B+30$, $100B+31$, $100B+32$, $100B+33$, $100B+34$ forment une suite de cinq entiers consécutifs et de Harshad.

5.b) Pour tout entier *n*, les nombres $10^{n+2}B+30$, $10^{n+2}B+31$, $10^{n+2}B+32$, $10^{n+2}B+33$, $10^{n+2}B+34$ conviennent.

6.a) Le nombre *p* est de la forme $p=100A+10i+9$, avec A entier.

Alors $p+2=100A+10(i+1)+1$, puisque $i\leq 8$.

Ainsi $s(p)=s(A)+i+9$ et $s(p+2)=s(A)+i+1+1=s(A)+i+2$.

Cela montre que $s(p)$ et $s(p+2)$ sont de parités contraires.

p et $p+2$ sont tous les deux impairs, et l'un des deux au moins a une somme de chiffres paire d'après ce qui précède.

Or un nombre pair ne peut pas diviser un impair. Donc *p* et $p+2$ ne peuvent pas être tous deux de Harshad.

6.b) S'il existait 22 nombre de Harshad consécutifs, *n*, $n+1$, …, $n+21$, d'après la question précédente, aucun entier parmi *n*, $n+1$, …, $n+19$ ne doit être du type *p* précédent, c'est-à-dire avoir un chiffre des dizaines *i* compris entre 0 et 8 et un chiffre des unités égal à 9. Cela impose que le nombre formé par les deux derniers chiffres de *n* soit au moins égal à 90 et celui de $n+19$ soit au plus égal à 08. C'est impossible cal il y a 20 nombres pour 19 possibilités.

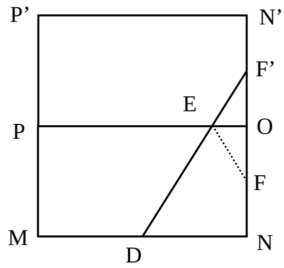
Exercice 2 - National – Le billard rectangulaire

1.a)

Cas général : il faut viser le point Q du rail [PO] situé sur la médiatrice de [DN], D étant le milieu de [MN].
Ce point est situé à 75 cm du point O.

1.b)

Si on construit le symétrique du rectangle par rapport au côté [PO], à toute trajectoire réelle DEF en une bande correspond une trajectoire fictive DEF' rectiligne, si F' est le symétrique de F.

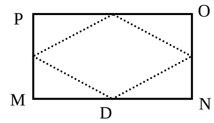


Le point E solution est tel que $\frac{OE}{DN} = \frac{F'O}{F'N} = \frac{1}{3}$.

Il est donc situé à 50 cm du point O.

1.c)

Une solution évidente est de viser le milieu de [ON].
Il est évident que la trajectoire est un losange de sommets les quatre milieux des côtés.



2.a)

1er cas : le point de départ D est distinct de M et N.
Avec le rectangle symétrique du 1.b), tous les points atteignables en une bande ont leur symétrique à l'intérieur du rectangle ON'P'P ou sur l'un des trois côtés sauf [PO].
On peut donc atteindre ainsi tous les points du billard sauf ceux situés sur le segment [PO]. Ces derniers sont atteignables de la même manière en symétrisant le rectangle initial soit par rapport à (ON), soit par rapport à (PM).
Tous les points sont atteignables en une bande.

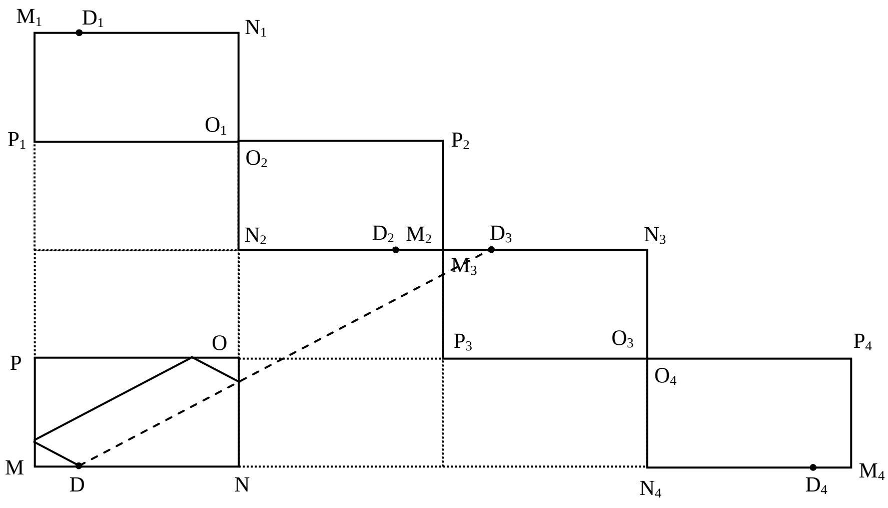
2e cas : D est confondu avec M
Avec la méthode précédente (symétrie par rapport à (OP), les points du segment [PM] sont eux aussi exclus. On peut atteindre ces points en symétrisant par rapport à (ON). La seule impossibilité est de symétriser par rapport à (PM), car M est situé sur cette droite (et on n'aura pas de bande). Cela exclut O.
Tous les points sauf O sont atteignables.

3e cas : identique au précédent : on peut atteindre tous les points sauf P.

2.b)

1er cas : le point de départ D est distinct de M et N.
On peut raisonner en effectuant trois symétries successives du rectangle initial. La figure ci-dessous donne les images possibles du rectangle initial en se limitant à des symétries vers la droite ou vers le haut : les images possibles du rectangle OPMN sont $O_1P_1M_1N_1$, $O_2P_2M_2N_2$, $O_3P_3M_3N_3$ ou $O_4P_4M_4N_4$.
Le segment $[M_3N_3]$ est le translaté du segment [MN] par la translation de vecteur $\overrightarrow{MM_2}$. Si D_3 est le translaté de D, on voit qu'il existe toujours une solution en trois bandes en visant le point D_3.

2e cas : le point D est égal à M ou à N.
Dans ce cas, il suffit de viser le point P (ou O). On revient au point de départ en trois bandes.

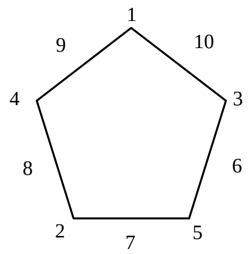


Exercice 3 - Académique – Autour d'un polygone

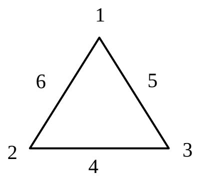
1.a)
La somme des nombres placés sur les cinq côtés est égale à $5S$. Elle est aussi égale à la somme de tous les entiers de 1 à 10, augmentée de celle des entiers placés sur les sommets (puisque ces derniers doivent être comptés deux fois).
On a : $1+2+...+10=55$, et la somme des entiers placés sur les sommets vaut au minimum $1+2+3+4+5=15$, et au maximum $6+7+8+9+10=40$.
D'où $55+15 \leq 5S \leq 55+40$. On en déduit $14 \leq S \leq 19$.

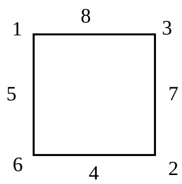
1.b)
On peut obtenir la valeur $S=14$ avec la configuration ci-contre.

La valeur 14 est donc la valeur minimale.



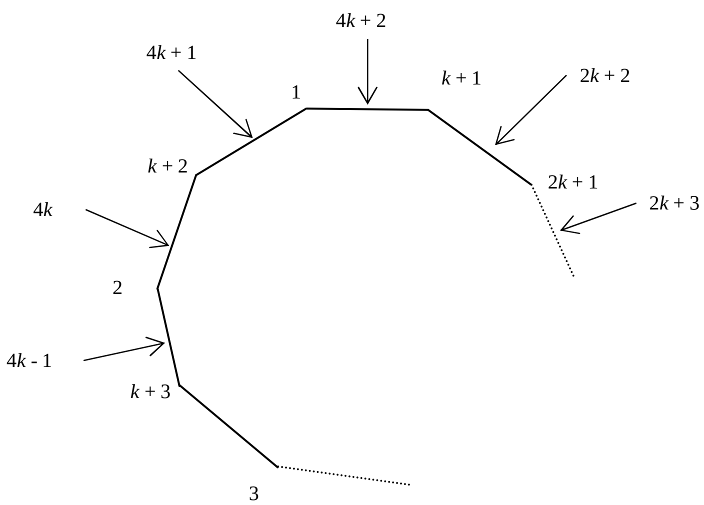
2.a) et b)
Par un raisonnement analogue au précédent, on trouve que :
a) Si $n=3$, on a $9 \leq S \leq 12$; b) si $n=4$, on a $11{,}5 \leq S \leq 15{,}5$.
Les minimums sont respectivement $S=3$ et $S=12$, atteints avec les configurations suivantes :





3.
En raisonnant comme en 1.a), on obtient :
$(1+...+2n)+(1+...+n) \leq nS \leq (1+...+2n)+(n+1+...+2n)$,
Soit $n(2n+1)+\dfrac{n(n+1)}{2} \leq nS \leq n(2n+1)+\left[n(2n+1)-\dfrac{n(n+1)}{2}\right]$.
En simplifiant, on obtient : $\dfrac{5n+3}{2} \leq S \leq \dfrac{7n+3}{2}$.

4.
Si $n=2k+1$, le minimum théorique de S est $\dfrac{5(2k+1)+3}{2}=5k+4$.
On peut atteindre ce minimum en plaçant les entiers de 1 jusqu'à $2k+1$ en partant d'un sommet, et en sautant de deux en deux dans le même sens.
Puis on place les entiers de $2k+2$ jusqu'à $4k+2$ sur les côtés en tournant dans l'autre sens (figure suivante).



Exercice 4 - Académique Séries autres que S – Le tour de magie

1.
Le résultat est égal à 22.

2.
On peut conjecturer que le résultat est toujours égal à 22.

3.
Si le nombre choisi s'écrit $100c+10d+u$, la somme s'écrit :

$(10c+d)+(10d+c)+(10c+u)+(10u+c)+(10d+u)+(10u+d)$,

soit encore $22(c+d+u)$.

En divisant par la somme des chiffres $(c+d+u)$, on trouve 22.

4.a)
Il y a trois nombres possibles : 24, 42 et 44.
$24+42+44=110$, et $110/(4+2+4)=11$. L'algorithme donne 11.

4.b)
Avec l'algorithme écrit en langage de programmation, on trouve 22.

4.c)
On remarque que dans l'algorithme en français, on demande que les chiffres soient distincts, ce qui n'est pas le cas pour 424.
Si l'on considérait les chiffres de 424 comme trois chiffres distincts, on composerait les nombres 42, 24, 44, 44, 24, 42 et le résultat final serait bien 22. C'est exactement ce que fait l'algorithme programmé.

5.a)
Pour deux chiffres, on obtient 11. (Par exemple, pour 25, $(25+52)/(2+5)=11$).

Démonstration : $(10d+u)+(10u+d)=11(d+u)$.

5.b)
Avec des nombres à 4 chiffres, on obtient 33.
Démonstration :
$(10m + c) + (10m + d) + (10m + u) + (10c + d) + (10c + u) + (10d + u) + (10c + m) + (10d + m) + (10u + m) + (10d + c) + (10u + c) + (10u + d)$
$= 33(m + c + d + u)$.

6.
Conjectures :
- pour 5 chiffres, on obtient 44 ;
- pour n chiffres, on obtient $11(n-1)$.