OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES
CLASSE DE PREMIÈRE

SESSION 2013

SUJET RÉSERVÉ AUX CANDIDATS AUTRES QUE CEUX DE LA SÉRIE S

DURÉE : 4 heures.

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.
Les quatre exercices sont indépendants. Les calculatrices sont autorisées.
Recommandations :
- *il est important d'argumenter les affirmations ;*
- *même si la solution n'est pas complètement aboutie, le candidat est invité à décrire sa démarche ; un résultat, même partiel, sera valorisé.*

EXERCICE 1 (National) – LES NOMBRES HARSHAD

Un entier naturel non nul est un **nombre Harshad** s'il est divisible par la somme de ses chiffres.
Par exemple, $n = 24$ est un nombre Harshad car la somme de ses chiffres est 2 + 4 = 6, et 24 est bien divisible par 6.

1. a) Montrer que 364 est un nombre Harshad.
   b) Quel est le plus petit entier qui ne soit pas un nombre Harshad ?

2. a) Donner un nombre Harshad de 4 chiffres.
   b) Soit n un entier non nul. Donner un nombre Harshad de n chiffres.

3. a) Montrer que 110, 111, 112 forment une liste de trois nombres Harshad consécutifs.
   b) En insérant judicieusement le chiffre 0 dans l'écriture décimale des nombres précédents, construire une autre liste de trois nombres Harshad consécutifs.
   c) Justifier l'existence d'une infinité de listes de trois nombres Harshad consécutifs.

4. a) Soit A = 30 × 31 × 32 × 33. Calculer la somme des chiffres de A.
   b) En déduire que 98 208 030, 98 208 031, 98 208 032 et 98 208 033 forment une liste de quatre nombres Harshad consécutifs.
   c) Justifier l'existence d'une infinité de listes de quatre nombres Harshad consécutifs.

5. a) En s'inspirant de la question 4, trouver une liste de cinq nombres Harshad consécutifs.
   b) Justifier l'existence d'une infinité de listes de cinq nombres Harshad consécutifs.

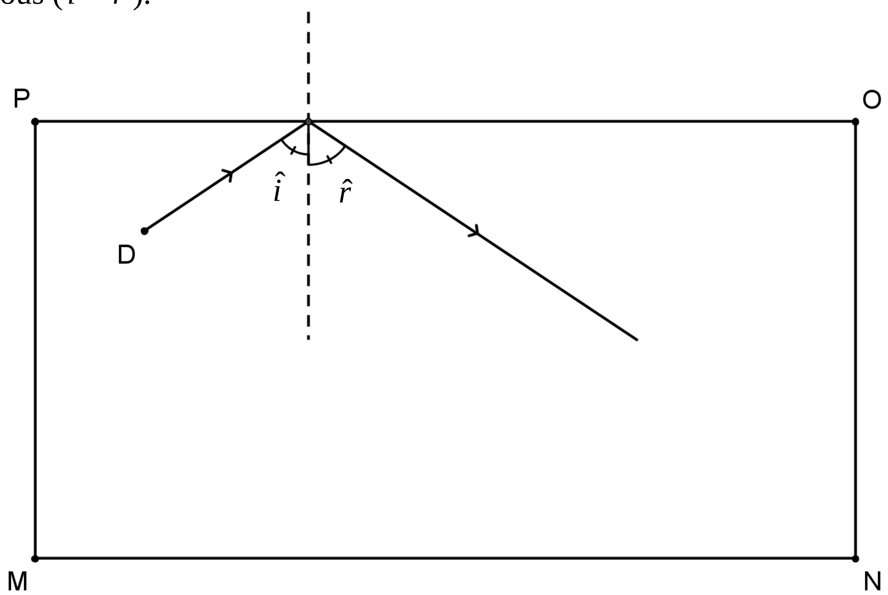
6. a) Soit i un chiffre compris entre 0 et 8.
   Soit p un entier dont le chiffre des dizaines est i et le chiffre des unités est 9.
   Montrer que soit la somme des chiffres du nombre p soit celle de $p+2$ est un nombre pair.
   En déduire que p et $p+2$ ne peuvent pas être tous les deux des nombres Harshad.

   b) Existe-t-il une liste de 22 nombres Harshad consécutifs ?

EXERCICE 2 (National) – LE BILLARD RECTANGULAIRE

On considère un billard de forme rectangulaire, de longueur 300 cm et de largeur 160 cm, dont les boules sont assimilées à des points.

Entre deux rebonds toutes les trajectoires sont rectilignes.
Lorsque la boule atteint l'un des bords (rails) du billard, elle y rebondit suivant les règles de la physique des chocs élastiques : l'angle d'incidence $\hat{i}$ étant égal à l'angle de réflexion $\hat{r}$, comme sur la figure ci-dessous ($\hat{i} = \hat{r}$).



1. On frappe une boule placée au milieu du rail [MN].

   a) Quel point du rail [PO] peut-on viser pour que la boule atteigne le point N en une bande (c'est-à-dire avec un seul rebond) ?

   b) Quel point du rail [PO] peut-on viser pour que la boule atteigne en une bande le milieu du rail [NO] ?

   c) Quel point du rail [NO] peut-on viser pour que la boule revienne à son point de départ en trois bandes (c'est-à-dire après exactement trois rebonds) ?

2. On frappe une boule placée en un point quelconque du rail [MN].

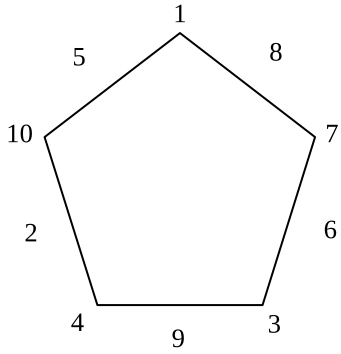
   a) Est-il possible d'atteindre en une bande n'importe quelle boule placée sur la surface de jeu ?

   b) Est-il toujours possible de la frapper de sorte qu'elle revienne en trois bandes à son point initial ?

EXERCICE 3 (Académique) – AUTOUR D'UN POLYGONE

1. Les entiers de 1 à 10 sont placés aux sommets et sur les côtés d'un pentagone, de sorte que la somme S des entiers associés à chaque côté (celui placé sur le côté du pentagone et les deux placés sur les sommets qui délimitent ce côté) soit la même pour chaque côté.

   La figure ci-contre donne un exemple pour lequel la somme S est égale à 16.



   a) Pour un placement possible, quelle est la plus petite somme S que l'on peut obtenir ?
   b) Donner un exemple de tel placement.

   Dans la suite, pour n entier supérieur ou égal à 3, on place lorsque c'est possible les entiers de 1 à $2n$ *aux sommets et sur les côtés d'un polygone à n côtés, de sorte que la somme S des entiers associés à chaque côté (celui placé sur le côté du polygone et les deux placés sur les sommets qui délimitent ce côté) soit la même pour chaque côté.*

2. Dans chacun des cas suivants, montrer que le placement est possible, et donner une configuration pour laquelle la somme S est minimale :
   a) $n = 3$;
   b) $n = 4$.

3. Dans cette question, on suppose que le placement est possible.
   Montrer que l'on a : $\dfrac{5n+3}{2} \leq S \leq \dfrac{7n+3}{2}$.
   (On pourra utiliser l'égalité $1+2+...+N = \dfrac{N(N+1)}{2}$, valable pour tout entier $N \geq 1$.)

4. Dans cette question, on suppose que n est impair, et l'on pose $n = 2k+1$, avec k entier et $k \geq 1$.

   Indiquer une façon de disposer les entiers de 1 à $2n$ de sorte que la configuration soit possible, et que la somme S soit minimale. (On pourra faire un schéma.)

EXERCICE 4 (Académique) – LE TOUR DE MAGIE

Voici un algorithme en langage naturel (algorithme 1) :

« *Choisir un nombre entier naturel à trois chiffres deux à deux distincts.*

Écrire tous les nombres entiers naturels possibles à deux chiffres, composés des chiffres du nombre précédent, puis les additionner. Diviser la somme obtenue par la somme des chiffres du nombre initial et annoncer le résultat. »

Voici un algorithme transcrit dans un langage de programmation (algorithme 2) :

```
VARIABLES
    c EST_DU_TYPE NOMBRE
    d EST_DU_TYPE NOMBRE
    u EST_DU_TYPE NOMBRE
    S1 EST_DU_TYPE NOMBRE
    S2 EST_DU_TYPE NOMBRE
    R EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
    LIRE c
    LIRE d
    LIRE u
    S1 PREND_LA_VALEUR (10*c+d)+(10*d+c)+(10*c+u)+(10*u+c)+(10*d+u)+(10*u+d)
    S2 PREND_LA_VALEUR c+d+u
    R PREND_LA_VALEUR S1/S2
    AFFICHER R
FIN_ALGORITHME
```

1. Choisir un nombre entier naturel quelconque, s'écrivant avec trois chiffres distincts deux à deux. Vérifier que chacun des deux algorithmes donne le même résultat avec ce nombre.

2. Recommencer avec deux autres entiers naturels, s'écrivant avec trois chiffres deux à deux distincts. Que peut-on conjecturer sur le résultat obtenu avec un nombre de départ quelconque ?

3. Démontrer votre conjecture pour un nombre initial de trois chiffres deux à deux distincts.

4.
   a) Donner tous les nombres entiers naturels distincts à deux chiffres, composés avec les chiffres du nombre 424, puis faire fonctionner l'algorithme 1 en français pour 424.
   b) Faire fonctionner l'algorithme 2 pour le nombre 424.
   c) Expliquer les différences observées.

Dans les questions suivantes, on continue toujours de former des nombres à deux chiffres à partir de ceux du nombre initial, dont on suppose les chiffres deux à deux distincts.

5.
   a) Qu'obtient-on pour des nombres entiers naturels initiaux à deux chiffres ?
   Démontrer votre affirmation.
   b) Même question pour des nombres entiers initiaux à quatre chiffres.

6. Que peut-on conjecturer si l'on choisit un entier initial à 5 chiffres ? à *n* chiffres ?