OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES
CLASSE DE PREMIÈRE

SESSION 2013

SUJET RÉSERVÉ AUX CANDIDATS DE LA SÉRIE S

DURÉE : 4 heures.

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.
Les quatre exercices sont indépendants. Les calculatrices sont autorisées.
Recommandations :

- *il est important d'argumenter les affirmations ;*
- *même si la solution n'est pas complètement aboutie, le candidat est invité à décrire sa démarche ; un résultat, même partiel, sera valorisé.*

EXERCICE 1 (National) – LES NOMBRES HARSHAD

Un entier naturel non nul est un **nombre Harshad** s'il est divisible par la somme de ses chiffres.
Par exemple, $n = 24$ est un nombre Harshad car la somme de ses chiffres est 2 + 4 = 6, et 24 est bien divisible par 6.

1. a) Montrer que 364 est un nombre Harshad.
   b) Quel est le plus petit entier qui ne soit pas un nombre Harshad ?

2. a) Donner un nombre Harshad de 4 chiffres.
   b) Soit n un entier non nul. Donner un nombre Harshad de n chiffres.

3. a) Montrer que 110, 111, 112 forment une liste de trois nombres Harshad consécutifs.
   b) En insérant judicieusement le chiffre 0 dans l'écriture décimale des nombres précédents, construire une autre liste de trois nombres Harshad consécutifs.
   c) Justifier l'existence d'une infinité de listes de trois nombres Harshad consécutifs.

4. a) Soit A = 30 × 31 × 32 × 33. Calculer la somme des chiffres de A.
   b) En déduire que 98 208 030, 98 208 031, 98 208 032 et 98 208 033 forment une liste de quatre nombres Harshad consécutifs.
   c) Justifier l'existence d'une infinité de listes de quatre nombres Harshad consécutifs.

5. a) En s'inspirant de la question 4, trouver une liste de cinq nombres Harshad consécutifs.
   b) Justifier l'existence d'une infinité de listes de cinq nombres Harshad consécutifs.

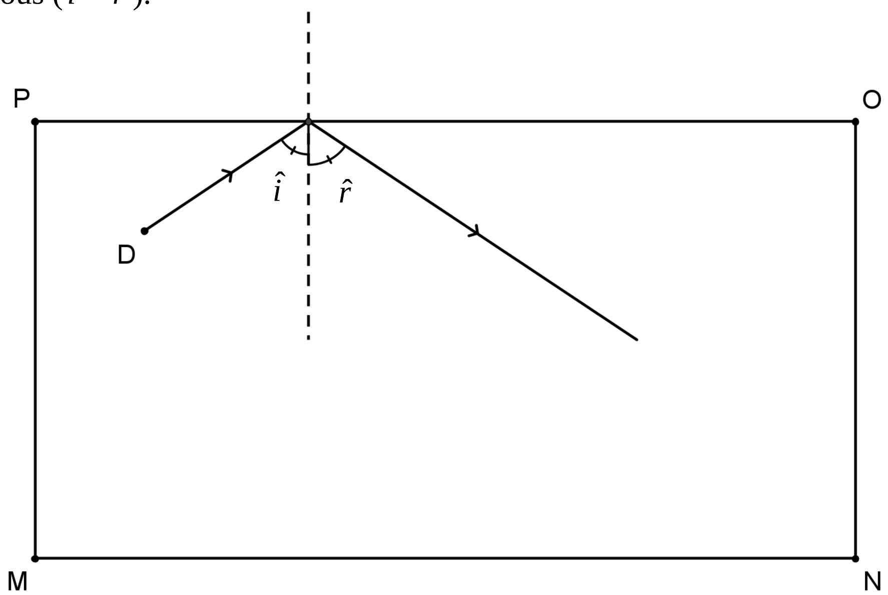
6. a) Soit i un chiffre compris entre 0 et 8.
   Soit p un entier dont le chiffre des dizaines est i et le chiffre des unités est 9.
   Montrer que soit la somme des chiffres du nombre p soit celle de $p+2$ est un nombre pair.
   En déduire que p et $p+2$ ne peuvent pas être tous les deux des nombres Harshad.

   b) Existe-t-il une liste de 22 nombres Harshad consécutifs ?

EXERCICE 2 (National) – LE BILLARD RECTANGULAIRE

On considère un billard de forme rectangulaire, de longueur 300 cm et de largeur 160 cm, dont les boules sont assimilées à des points.

Entre deux rebonds toutes les trajectoires sont rectilignes.
Lorsque la boule atteint l'un des bords (rails) du billard, elle y rebondit suivant les règles de la physique des chocs élastiques : l'angle d'incidence $\hat{i}$ étant égal à l'angle de réflexion $\hat{r}$, comme sur la figure ci-dessous ($\hat{i} = \hat{r}$).



1. On frappe une boule placée au milieu du rail [MN].

   a) Quel point du rail [PO] peut-on viser pour que la boule atteigne le point N en une bande (c'est-à-dire avec un seul rebond) ?

   b) Quel point du rail [PO] peut-on viser pour que la boule atteigne en une bande le milieu du rail [NO] ?

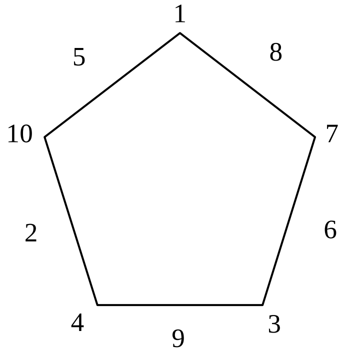
   c) Quel point du rail [NO] peut-on viser pour que la boule revienne à son point de départ en trois bandes (c'est-à-dire après exactement trois rebonds) ?

2. On frappe une boule placée en un point quelconque du rail [MN].

   a) Est-il possible d'atteindre en une bande n'importe quelle boule placée sur la surface de jeu ?

   b) Est-il toujours possible de la frapper de sorte qu'elle revienne en trois bandes à son point initial ?

EXERCICE 3 (Académique) – AUTOUR D'UN POLYGONE



1. Les entiers de 1 à 10 sont placés aux sommets et sur les côtés d'un pentagone, de sorte que la somme S des entiers associés à chaque côté (celui placé sur le côté du pentagone et les deux placés sur les sommets qui délimitent ce côté) soit la même pour chaque côté.

   La figure ci-contre donne un exemple pour lequel la somme S est égale à 16.

   a) Pour un placement possible, quelle est la plus petite somme S que l'on peut obtenir ?
   b) Donner un exemple de tel placement.

   Dans la suite, pour n entier supérieur ou égal à 3, on place lorsque c'est possible les entiers de 1 à $2n$ aux sommets et sur les côtés d'un polygone à n côtés, de sorte que la somme S des entiers associés à chaque côté (celui placé sur le côté du polygone et les deux placés sur les sommets qui délimitent ce côté) soit la même pour chaque côté.

2. Dans chacun des cas suivants, montrer que le placement est possible, et donner une configuration pour laquelle la somme S est minimale :
   a) $n=3$;
   b) $n=4$.

3. Dans cette question, on suppose que le placement est possible.
   Montrer que l'on a : $\dfrac{5n+3}{2} \leq S \leq \dfrac{7n+3}{2}$.
   (On pourra utiliser l'égalité $1+2+...+N=\dfrac{N(N+1)}{2}$, valable pour tout entier $N \geq 1$.)

4. Dans cette question, on suppose que n est impair, et l'on pose $n=2k+1$, avec k entier et $k \geq 1$.

   Indiquer une façon de disposer les entiers de 1 à $2n$ de sorte que la configuration soit possible, et que la somme S soit minimale. (On pourra faire un schéma.)

EXERCICE 4 (Académique) – LES TROIS CERCLES ET L'OGIVE

Sur la figure suivante, ABCD est un carré de côté 48. On a tracé le quart de cercle de centre A passant par B et le quart de cercle de centre B passant par A.

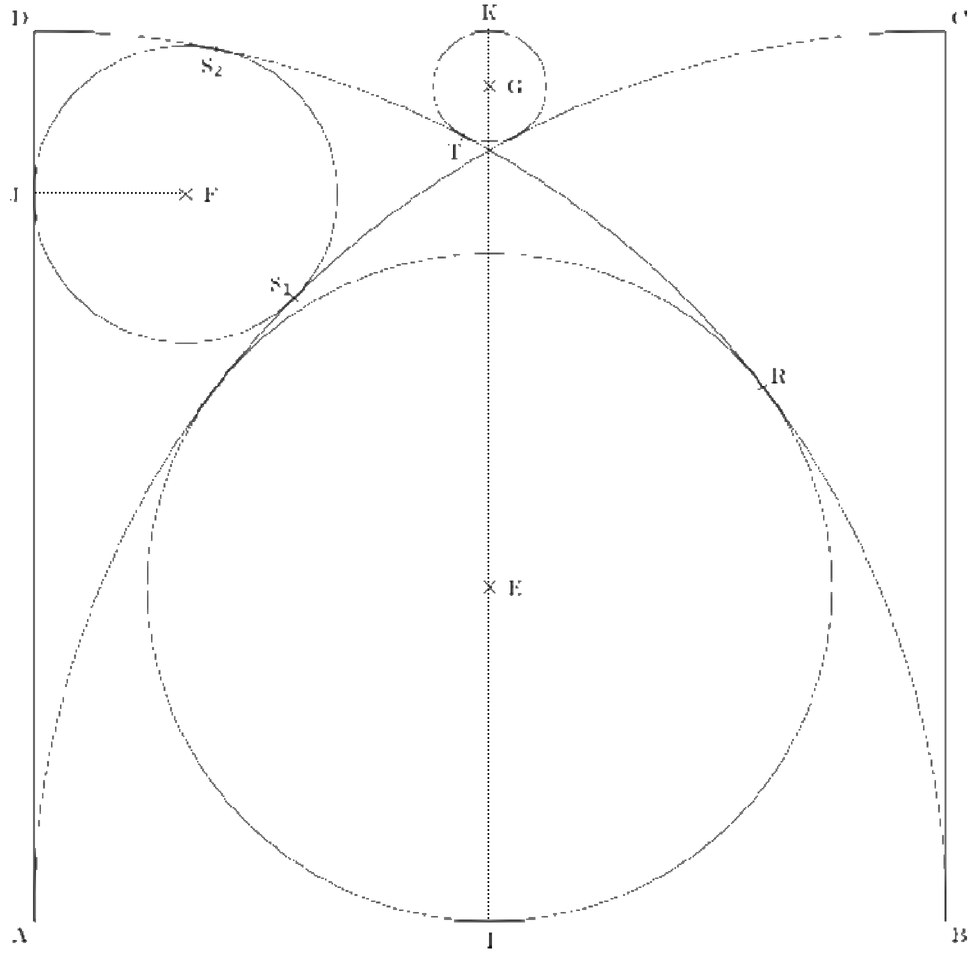
Chacun des trois cercles tracés est tangent aux deux quarts de cercle.

Le grand cercle est aussi tangent au côté [AB] en I ; on note E son centre et r son rayon.

Le moyen cercle est aussi tangent au côté [AD] en J ; on note F son centre et s son rayon.

Le petit cercle est aussi tangent au côté [DC] en K ; on note G son centre et t son rayon.

Note : on dit que deux cercles sont tangents en un point s'ils admettent la même tangente en ce point.



1. Soit R le point de contact du grand cercle avec l'arc $\overset{\frown}{BD}$.
   a) Exprimer AE^2 en fonction de r.
   b) Démontrer que les point A, E, R sont alignés.
   c) En déduire la valeur du rayon r du grand cercle.

2. Par une méthode analogue à celle de la question 1, calculer le rayon t du petit cercle. (On pourra faire intervenir le point de contact T du petit cercle avec l'arc $\overset{\frown}{BD}$.)

3. Soit S_1 et S_2 les points de contact respectifs du moyen cercle avec les arcs $\overset{\frown}{AC}$ et $\overset{\frown}{BD}$.
   a) En utilisant d'autres alignements, démontrer les égalités : $\begin{cases} AF + s = 48 \\ BF - s = 48 \end{cases}$.
   b) En calculant $BF^2 - AF^2$ de deux manières, calculer le rayon s du moyen cercle.