Sommes infinies ?

TRAAM Dijon 2023-2024

Académie de Dijon

1. Trois sommes infinies
2. Une piste pour sortir du problème
3. pour aller plur loin

Définition

Soient A, B, S trois sommes distinctes, telles que :

- $A = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$
- $B = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \dots$
- $S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots$

Peut-on déterminer A, B et S ?

Proposition pour déterminer A

Par définition :

$A = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots$

On remarque qu'en réorganisant les termes de la somme

$A = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots) = 1 - A$

Donc ainsi $A =$

Proposition pour déterminer A

Par définition :

$A = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$

On remarque qu'en réorganisant les termes de la somme

$A = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots) = 1 - A$

Donc $A + A = 1$ i.e. $2A = 1$ ainsi $A = \frac{1}{2}$

►► Que pensez-vous de cette proposition ?

Proposition pour déterminer A

Par définition :

$A = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - ...$

On remarque qu'en réorganisant les termes de la somme

$A = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - ... = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - ...) = 1 - A$

Donc $A + A = 1$ i.e. $2A = 1$ ainsi $A = \frac{1}{2}$

▶▶ Que pensez-vous de cette proposition ?

Proposition pour déterminer B

Par définition :

$B = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - \ldots$

On remarque qu'en faisant la différence terme à terme, on a :

$$\begin{aligned} B - A = & \quad 1 - 2 \quad +3 - 4 \quad +5 - 6 \quad \ldots \\ & -1 + 1 \quad -1 + 1 \quad -1 + 1 \quad \ldots \\ = & \quad 0 - 1 \quad +2 - 3 \quad +4 - 5 \quad \ldots = -B \end{aligned}$$

Donc $B =$

Proposition pour déterminer B

Par définition :

$B = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - ...$

On remarque qu'en faisant la différence terme à terme, on a :

$$\begin{aligned} B - A = & \quad 1 - 2 \quad +3 - 4 \quad +5 - 6 \quad ... \\ & -1 + 1 \quad -1 + 1 \quad -1 + 1 \quad ... \\ = & \quad 0 - 1 \quad +2 - 3 \quad +4 - 5 \quad ... = -B \end{aligned}$$

Donc $2B = A = \frac{1}{2}$ ainsi $B = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$

▶▶ Que pensez-vous de cette proposition ?

Proposition pour déterminer B

Par définition :

$B = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - \dots$

On remarque qu'en faisant la différence terme à terme, on a :

$$\begin{array}{rrrrr} B - A = & 1-2 & +3-4 & +5-6 & \dots \\ & -1+1 & -1+1 & -1+1 & \dots \\ = & 0-1 & +2-3 & +4-5 & \dots = -B \end{array}$$

Donc $2B = A = \frac{1}{2}$ ainsi $B = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$

▶▶ Que pensez-vous de cette proposition ?

Proposition pour déterminer S

Par définition :

$S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ...$

On remarque qu'en faisant la différence terme à terme :

$$\begin{aligned} S - B = &\quad 1 + 2 \quad +3 + 4 \quad +5 + 6 \quad ... \\ &\ -1 + 2 \quad -3 + 4 \quad -5 + 6 \quad ... \\ = &\quad 0 + 4 \quad +0 + 8 \quad +0 + 12 \quad ... = 4(1 + 2 + 3 + ...) = 4S \end{aligned}$$

Ainsi, on trouve :

$S =$

Proposition pour déterminer S

Par définition :

$S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots$

On remarque qu'en faisant la différence terme à terme :

$$\begin{array}{rcccccl} S - B = & 1+2 & +3+4 & +5+6 & \ldots & & \\ & -1+2 & -3+4 & -5+6 & \ldots & & \\ = & 0+4 & +0+8 & +0+12 & \ldots & = 4(1+2+3+\ldots) = 4S & \end{array}$$

Donc $S - 4S = B$ i.e. $-3S = B$ d'où $S = -\frac{B}{3} = -\frac{\frac{1}{4}}{3}$

Ainsi, on trouve :

$S = -\frac{1}{12}$

►► Que pensez-vous de cette proposition ?

Proposition pour déterminer S

Par définition :

$S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots$

On remarque qu'en faisant la différence terme à terme :

$$\begin{array}{rcccccl} S - B = & 1+2 & +3+4 & +5+6 & \ldots & & \\ & -1+2 & -3+4 & -5+6 & \ldots & & \\ = & 0+4 & +0+8 & +0+12 & \ldots & = 4(1+2+3+\ldots) = 4S \end{array}$$

Donc $S - 4S = B$ i.e. $-3S = B$ d'où $S = -\frac{B}{3} = -\frac{\frac{1}{4}}{3}$

Ainsi, on trouve :

$S = -\frac{1}{12}$

▶▶ Que pensez-vous de cette proposition ?

Retour sur A

On peut aussi remarquer que :

$$\begin{aligned} A &= \underbrace{1-1}_{} + \underbrace{1-1}_{} + \underbrace{1-1}_{} + \ldots. \\ &= \quad 0 \quad + \quad 0 \quad + \quad 0 \quad + \ldots \end{aligned}$$

Donc $A = 0$

Ou encore que :

$$\begin{aligned} A &= 1 \; \underbrace{-1+1}_{} \; \underbrace{-1+1}_{} \; \underbrace{-1+1}_{} \; \ldots. \\ &= 1 + \quad 0 \quad + \quad 0 \quad + \quad 0 \quad \ldots \end{aligned}$$

Donc $A = 1$

►► Cela pose un problème ?

Retour sur A

On peut aussi remarquer que :

$$\begin{array}{ccccccccc} A & = & \underbrace{1-1} & + & \underbrace{1-1} & + & \underbrace{1-1} & + & \ldots. \\ & = & 0 & + & 0 & + & 0 & + & \ldots \end{array}$$

Donc $A = 0$

Ou encore que :

$$\begin{array}{ccccccccc} A & = & 1 & & \underbrace{-1+1} & & \underbrace{-1+1} & & \underbrace{-1+1} & \ldots. \\ & = & 1 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & \ldots \end{array}$$

Donc $A = 1$

▶▶ Cela pose un problème ?

Retour sur A

On peut aussi remarquer que :

$$\begin{aligned} A &= \underbrace{1-1} + \underbrace{1-1} + \underbrace{1-1} + \ldots. \\ &= \quad 0 \quad + \quad 0 \quad + \quad 0 \quad + \ldots \end{aligned}$$

Donc $A = 0$

Ou encore que :

$$\begin{aligned} A &= 1 \quad \underbrace{-1+1} \quad \underbrace{-1+1} \quad \underbrace{-1+1} \quad \ldots. \\ &= 1 + \quad 0 \quad + \quad 0 \quad + \quad 0 \quad \ldots \end{aligned}$$

Donc $A = 1$

▶▶ Cela pose un problème ?

Origine du problème

Qu'est-ce qu'une somme infinie ? Quelle règle les régissent ?

Il semble que l'on a oublié de préalablement à tout calcul de se poser cette question.

Utilisons des sommes finies

On note a_n la somme des n premiers termes de A.
$a_1 = 1$, $a_2 = 1 - 1 = 0$, $a_3 = 1 - 1 + 1 = 1$,
$a_4 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$ ...
Donc $a_n = 1$ si n est impair et $a_n = 0$ sinon.
Ainsi pour tout n, $a_n = \dfrac{1}{2}(1 - (-1)^n)$.
Comment définir A ?
On peut définir A comme la limite de la suite a_n, et cette limite n'existe pas.

Utilisons des sommes finies

On note a_n la somme des n premiers termes de A.
$a_1 = 1$, $a_2 = 1 - 1 = 0$, $a_3 = 1 - 1 + 1 = 1$,
$a_4 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$ ...
Donc $a_n = 1$ si n est impair et $a_n = 0$ sinon.
Ainsi pour tout n, $a_n = \dfrac{1}{2}(1 - (-1)^n)$.
Comment définir A ?
On peut définir A comme la limite de la suite a_n, et cette limite n'existe pas.

Utilisons des sommes finies

On note a_n la somme des n premiers termes de A.
$a_1 = 1$, $a_2 = 1 - 1 = 0$, $a_3 = 1 - 1 + 1 = 1$,
$a_4 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$ ...
Donc $a_n = 1$ si n est impair et $a_n = 0$ sinon.
Ainsi pour tout n, $a_n = \frac{1}{2}(1 - (-1)^n)$.
Comment définir A ?
On peut définir A comme la limite de la suite a_n, et cette limite n'existe pas.

Utilisons des sommes finies

On note s_n la somme des n premiers termes de S.

alors $s_n = 1 + 2 + 3 + ... + n$ donc par propriété $s_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

$\lim s_n = +\infty$

En prenant la même définition d'une somme infinie : S correspond à $+\infty$.

Utilisons des sommes finies

Ainsi, on définira une somme infinie comme la limite de la suite dont chaque terme est la somme des n premier termes de la somme infinie.
Avec cette définition : A n'existe pas et S est $+\infty$.

Une nouvelle somme infinie

Soit $P = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16}......$

On constate que $P = 1 - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 \ldots$ donc

$P = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^4 ......$

On note p_n la somme des n premiers termes de P.

Ainsi, $p_n = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + ... + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Par propriété, $p_n = \dfrac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$

Une nouvelle somme infinie

Soit $P = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \dots\dots$

On constate que $P = 1 - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 \dots$ donc

$P = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^4 \dots\dots$

On note p_n la somme des n premiers termes de P.

Ainsi, $p_n = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \dots. + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Par propriété, $p_n = \dfrac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$

Une nouvelle somme infinie

Donc $P = \lim p_n = \lim \frac{2}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) = \frac{2}{3}$

On peut retrouver cela par un programme.

Ordre des opérations

Soit $P = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \ldots\ldots = \frac{2}{3}$.
On peut être tenter comme P est un nombre réel de faire ce que l'on avait fait initialement pour A, B et S : appliquer sur les sommes infinies les règles des sommes finies.
En appliquant la propriété de commutativité, on calcule de même P est commençant pas les termes négatifs : $-\frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{32} \ldots\ldots$

- Est-ce que ce changement d'ordre change le résultat ?
- Quand ajoute-t-on les termes positifs ?

Ordre des opérations

Soit $P = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} ..... = \frac{2}{3}$.
On peut être tenter comme P est un nombre réel de faire ce que l'on avait fait initialement pour A, B et S : appliquer sur les sommes infinies les règles des sommes finies.
En appliquant la propriété de commutativité, on calcule de même P est commençant pas les termes négatifs : $-\frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{32} .....$

- Est-ce que ce changement d'ordre change le résultat ?
- Quand ajoute-t-on les termes positifs ?