Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Olympiades nationales de mathématiques 2018

Métropole-Europe-Afrique-Orient-Inde

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Une pause de quinze minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices académiques »). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices autonomes non communicantes par ondes radio sont autorisées.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices nationaux

Les candidats traitent **deux exercices.** Ceux de la série S traitent les exercices numéros 1 (*Géométrie de l'à-peu-près*) et 2 (*Ensembles arithmétiques*), les autres traitent les exercices numéros 1 (*Géométrie de l'à-peu-près*) et 3 (*Boules de même couleur*).

Crédit Mutuel Enseignant
CASIO
Texas Instruments
Inria INVENTEURS DU MONDE NUMÉRIQUE
Animath
Google
hp
École Polytechnique Université Paris-Saclay

Exercice national numéro 1 (à traiter par tous les candidats)

Géométrie de l'à-peu-près

Mesures d'angles à peu près

On dit qu'un triangle ABC est à peu près rectangle en un sommet A si la mesure de l'angle en A est dans l'intervalle [75°, 105°]. On dit qu'un triangle ABC est à peu près isocèle en un sommet A si les mesures des angles en B et en C diffèrent de 15° au maximum.

1. ***a.*** Un triangle rectangle est-il à peu près rectangle ? Un triangle isocèle est-il à peu près isocèle ?
b. Un triangle peut-il être rectangle en deux sommets ? À peu près rectangle en deux sommets ? Le cas échéant, quand il est en plus acutangle (c'est-à-dire que tous ses angles sont aigus), est-il à peu près isocèle ?

2. Existe-t-il un triangle acutangle qui ne soit ni à peu près rectangle, ni à peu près isocèle ?

3. Écrire un programme en pseudocode, à recopier sur votre copie, testant si un triangle ABC dont on connaît les trois angles en A, B et C est à peu près isocèle.

Mesures de longueurs à peu près

Dans cette partie, on suppose qu'une unité de longueur a été donnée dans le plan, et on adopte les définitions suivantes :
- Deux points sont à peu près égaux si leur distance est inférieure ou égale à 0,1 ;
- Deux segments sont à peu près de même longueur si leurs longueurs diffèrent d'au plus 0,1 ;
- Un triangle est à peu près équilatéral si les longueurs de ses côtés diffèrent, deux à deux, d'au plus 0,1.

4. ***a.*** Un triangle rectangle dont l'hypoténuse mesure (exactement) 1 peut-il être à peu près équilatéral ?
b. Un triangle rectangle peut-il être à peu près équilatéral ?

5. On considère un cercle, de centre O de rayon (exactement) 2 et deux points de ce cercle : A, fixe, et B, mobile. On appelle I le milieu du segment $[OA]$ et H le projeté orthogonal de B sur la droite (OA).
a. Représenter sur une figure l'ensemble des points B pour lesquels H et I sont à peu près égaux. En calculer la longueur (le résultat sera donné arrondi au centième).
b. Si H et I sont à peu près égaux, le triangle AOB est-il à peu près équilatéral ?

Une statistique sur la population des triangles

On convient de caractériser tout triangle ABC par les mesures x et y de ses angles en A et B. Chaque triangle (et avec lui ceux qui ont les mêmes angles, qui lui sont donc semblables) est représenté par le point de coordonnées (x, y) dans le plan rapporté à un repère orthonormé. On choisit de représenter la mesure 10° par 1 cm.

6. Figurer sur un schéma (accompagné d'une légende explicite) :
a. Le domaine $\mathcal{T}$ constitué des points représentant tous les triangles ;
b. Le point E représentant les triangles équilatéraux ;
c. L'ensemble des points représentant les triangles rectangles.

7. ***a.*** Quelle partie $\mathcal{A}$ du domaine $\mathcal{T}$ représente les triangles acutangles ?
b. Si on estime la proportion des triangles acutangles dans l'ensemble des triangles par le rapport de l'aire de $\mathcal{A}$ à l'aire de $\mathcal{T}$, quelle est cette proportion ?

8. Quelle partie $\mathcal{R}$ du domaine $\mathcal{T}$ représente les triangles acutangles à peu près rectangles (au sens de la première partie) ? Quelle est leur proportion (dans le même sens que ci-dessus) dans l'ensemble des triangles ?

Exercice national numéro 2 (à traiter par les candidats de la série S)

Ensembles arithmétiques

Un ensemble S de rationnels est un ensemble arithmétique (en abrégé EA) si pour tout couple (a, b) avec a et b appartenant à S, il existe un élément c de S tel que l'un des nombres a, b ou c est la moyenne arithmétique (c'est-à-dire la demi-somme) des deux autres. On souhaite déterminer tous les entiers n strictement positifs pour lesquels il existe un EA ayant n éléments.

1. *a.* Les ensembles suivants sont-ils des EA ? Justifier.

$S_1 = \{0,1,2\}$ $\quad S_2 = \{0,1,2,3\}$ $\quad S_3 = \{0,1,2,4\}$ $\quad S_4 = \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right\}$

b. Démontrer qu'il n'existe pas d'EA à 2 éléments. Que dire des singletons (ensembles à un seul élément) ?

c. Donner un EA ayant 5 éléments, inclus dans l'intervalle $[0,2]$, et contenant 0, 1 et 2.

2. *a.* Outre $\frac{a+b}{2}$, quels sont les deux autres rationnels à envisager pour vérifier qu'un couple (a, b) d'éléments de S ne fait pas échec à la définition d'un EA ?

b. On désire écrire un algorithme qui teste si un ensemble est un EA. L'ensemble S est encodé sous la forme d'une liste S = [S[1],..,S[n]] de taille n. Par exemple la moyenne arithmétique du $i$ème et du $j$ème élément de S s'écrit (S[i]+S[j])/2.

```
fonction TesterEA(S=[S[1],..,S[n]] , n)
        Resultat ← Vrai
        Pour i de 1 à n
                Pour j de 1 à n
                [...]
                Fin Pour
        Fin Pour
        Renvoyer(Resultat)
```

On dispose de plus d'une fonction Appartient(r,S) qui renvoie Vrai lorsque le rationnel r appartient à la liste S et Faux sinon. Compléter le squelette de la fonction ci-contre (à recopier sur sa feuille de composition) pour qu'elle renvoie Vrai si et seulement si S =[S[1],..,S[n]] est un ensemble arithmétique de longueur n.

c. Modifier la fonction pour qu'elle réalise moins d'opérations dans le cas général (à recopier sur sa feuille de composition).

3. Soit n un entier strictement supérieur à 2 et S un EA ayant n éléments dont le plus grand est noté M et le plus petit m. Aux éléments a de S, on associe les nombres $\frac{2(a-m)}{M-m}$. On constitue ainsi l'ensemble S'. Démontrer que S' est un EA ayant n éléments, inclus dans l'intervalle $[0,2]$, et contenant 0, 1 et 2.

4. Soit S un EA ayant n éléments, inclus dans l'intervalle $[0,2]$, et contenant 0 et 2.
Démontrer que pour tout nombre réel x:

- Si x appartient à S et $0 < x < 1$ alors $\frac{x+2}{2}$ appartient à S ;
- Si x appartient à S et $1 < x < 2$ alors $\frac{x}{2}$ appartient à S.

En déduire qu'il n'existe pas de EA ayant 4 éléments.

5. Soit S un EA ayant n éléments, inclus dans l'intervalle $[0,2]$, et contenant 0 et 2.

a. Démontrer que s'il existe un élément a_1 de S tel que $0 < a_1 < \frac{2}{3}$, alors il existe un élément a_2 de S tel que $0 < a_1 < a_2 < \frac{2}{3}$.

En déduire que S ne contient aucun nombre strictement compris entre 0 et $\frac{2}{3}$.

b. Démontrer, de façon analogue, que S ne contient aucun nombre strictement compris entre $\frac{2}{3}$ et 1.

c. En déduire que $n \leq 5$.

6. Quels sont les entiers n pour lesquels il existe un EA ayant n éléments ?

Exercice national numéro 3 (à traiter par les candidats des séries autres que la série S)

Boules de même couleur

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dispose d'une urne contenant n boules pouvant être de différentes couleurs.
Le jeu consiste à extraire au hasard une boule de l'urne, puis sans remettre celle-ci dans l'urne à extraire une seconde boule de l'urne. Le joueur a gagné lorsque les deux boules tirées sont de la même couleur.
On admet qu'à chaque tirage, toutes les boules de l'urne ont la même probabilité d'être tirées.
On dit que le jeu est équitable lorsque la probabilité $P(G)$ que le joueur gagne est égale à $\frac{1}{2}$.

1. ***a.*** Démontrer que si l'urne contient 10 boules dont 4 blanches et 6 rouges alors $P(G) = \frac{7}{15}$.
b. Calculer $P(G)$ lorsque l'urne contient 12 boules dont 4 blanches, 6 rouges et 2 noires.

2. Dans cette question, l'urne contient 6 boules rouges et d'autres boules qui sont toutes blanches.
a. Soit x le nombre de boules blanches contenues dans l'urne.
Démontrer que $P(G) = \frac{x(x-1)+30}{(x+6)(x+5)}$.
b. Combien faudrait-il de boules blanches pour que le jeu soit équitable ?

3. Dans cette question, l'urne ne contient que des boules de deux couleurs différentes.
a. On suppose que l'urne présente la configuration (a, b) c'est-à-dire qu'elle contient, par exemple, a boules rouges et b boules blanches. Démontrer que le jeu est équitable lorsque $n = (a - b)^2$.
b. Réciproquement démontrer que si n est le carré d'un entier p alors il existe deux entiers naturels a et b avec $a \geq b$ que l'on exprimera en fonction de p tels que la configuration (a, b) conduise à un jeu équitable.
c. Donner six couples (a, b) conduisant à un jeu équitable.

4. Dans cette question, l'urne contient des boules de trois couleurs différentes selon la configuration (a, b, c), c'est-à-dire, par exemple, a boules blanches, b rouges et c noires.
a. Montrer que si $n = 13$, le jeu est équitable lorsque $a^2 + b^2 + c^2 = 91$. En déduire une configuration (a, b, c) conduisant à un jeu équitable pour $n = 13$.
b. Pour un nombre quelconque de boules, montrer que si le couple (x, y) conduit à un jeu équitable pour deux couleurs alors il existe une unique valeur de z non nulle telle que le triplet (x, y, z) conduise également à un jeu équitable pour trois couleurs.
c. Donner un triplet (a, b, c) conduisant à un jeu équitable pour trois couleurs.

5. On suppose que l'urne contient des boules de m couleurs différentes où $m \geq 2$.
Démontrer que la configuration $(1,3,9, \dots, 3^{m-1})$ conduit à un jeu équitable.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Olympiades académiques de mathématiques

académie Dijon

RÉGION ACADÉMIQUE BOURGOGNE FRANCHE-COMTÉ

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR, DE LA RECHERCHE ET DE L'INNOVATION

Académie de Dijon

Rappel : l'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Une pause de quinze minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices académiques »). Les candidats ne sont pas autorisés à quitter les locaux avant 11 heures.

Les calculatrices autonomes non communicantes par ondes radio sont autorisées.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.
Chaque candidat rend une copie. Chaque équipe éventuellement constituée rend une seule copie.

Exercices académiques

Les candidats traitent **deux exercices.** Ceux de la série S traitent les exercices numéro 4 (*XOR, le shérif des transmissions*) et numéro 5 (le drapeau tricolore). Les autres traitent les exercices numéro 4 (*XOR, le shérif des transmissions*) et numéro 6 (*3-2-1… Carré).*

CASIO · Texas Instruments · Inria · Animath · Google · hp · École Polytechnique

Exercice académique numéro 4 (à traiter par tous les candidats)

XOR, le shérif des transmissions

Dans cet exercice, un message est une suite de 0 et de 1, appelés bits.

Entre deux bits, on définit l'opération (notée $\oplus$ et en abrégé XOR) de la manière suivante :

$$0 \oplus 0 = 0 \quad ; \quad 0 \oplus 1 = 1 \quad ; \quad 1 \oplus 0 = 1 \quad ; \quad 1 \oplus 1 = 0$$

On étend naturellement cette opération à deux messages formés du même nombre de bits. Par exemple :

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 1 & 0 \\ \oplus & 1 & 0 & 0 \\ \hline & 0 & 1 & 0 \end{array} \qquad \text{ou encore} \qquad 10010001 \oplus 11001001 = 01011000 .$$

On admet que lorsqu'on effectue plusieurs XOR de suite, l'ordre de calcul ne change pas le résultat.

Les deux parties sont indépendantes.

Partie 1 : Cryptage d'un message

Pour crypter un message formé de 8 bits, on utilise une autre suite de 8 bits appelée clef.

Pour obtenir le message crypté, on effectue l'opération XOR entre le message initial et la clef.

1. Crypter le message 11110000 à l'aide de la clef 10101010.
2. Crypter le message obtenu à la question précédente à l'aide de la même clef.
3. Le message 00001111 est un message crypté à l'aide de la clef précédente, retrouver le message initial.
4. Décrire la méthode générale permettant de retrouver un message initial à partir du message crypté et de la clef. Justifier.

Partie 2 : Correction d'erreur lors d'une transmission

Une erreur de transmission est le changement d'un 0 en 1 (ou inversement) lors de l'envoi d'un message composé de bits. Il peut y avoir plusieurs erreurs de transmission dans le message reçu.

Afin de détecter et corriger d'éventuelles erreurs lors de la transmission de 4 bits (notés b_1, b_2, b_3, b_4) on calcule 4 bits de contrôle (notés c_1, c_2, c_3, c_4). Les bits de contrôle sont obtenus de la façon suivante :

$$c_1 = b_2 \oplus b_3 \oplus b_4 \quad ; \quad c_2 = b_1 \oplus b_3 \oplus b_4 \quad ; \quad c_3 = b_1 \oplus b_2 \oplus b_4 \quad ;$$

$$c_4 = b_1 \oplus b_2 \oplus b_3 \oplus b_4 \oplus c_1 \oplus c_2 \oplus c_3$$

On envoie alors les 8 bits suivants $b_1 b_2 b_3 b_4 c_1 c_2 c_3 c_4$.

1. Quel message de 8 bits doit-on envoyer pour transmettre 1011 ?

2. On admet que, durant la transmission du message, au plus un des 8 bits a été transmis de façon erronée. À partir des bits reçus, on recalcule les 4 bits de contrôle que l'on compare aux 4 bits de contrôle reçus (attention pour le recalcul de c_4, on utilise les 7 premiers bits reçus). Recopiez et complétez le tableau suivant dans lequel I signifie que le bit de contrôle recalculé est identique au bit de contrôle reçu (et D qu'il est différent).

Bit \ Bit erroné	aucun	b_1	b_2	b_3	b_4	c_1	c_2	c_3	c_4
c_1		I							
c_2		D							
c_3		D							
c_4		D							

3. Toujours dans le cas où il y a une seule erreur au plus, justifier qu'on peut toujours la corriger.

4. On reçoit le message 10111100. En admettant qu'il comporte au plus une erreur, retrouver le message envoyé.

5. On reçoit le message 01110010. Est-il correct ? La méthode précédente s'applique-t-elle ?

6. Montrer que s'il y a au plus deux erreurs, on peut toujours déterminer le nombre exact d'erreurs.

Exercice académique numéro 5 (à traiter par les candidats de la série S)

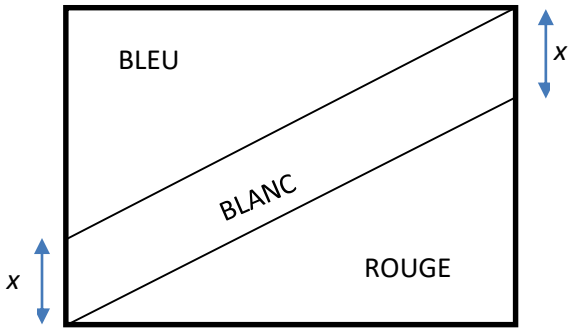
Le drapeau tricolore

Un groupe parlementaire, désireux de modifier notre drapeau tricolore tout en conservant l'ordre « bleu – blanc – rouge », ne souhaite pas que ces couleurs soient disposées verticalement ni horizontalement.

L'objet de ce problème est d'étudier trois dispositions différentes des couleurs.

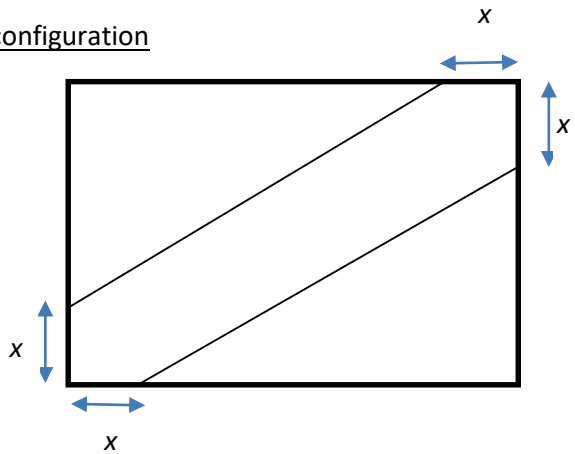
Dans toute la suite, on considère que le drapeau est un rectangle de longueur 150 cm et de largeur 100 cm.
De plus, **chaque couleur doit occuper un tiers de l'aire totale du drapeau**.

1. <u>Étude d'une première configuration</u>



Calculer x.

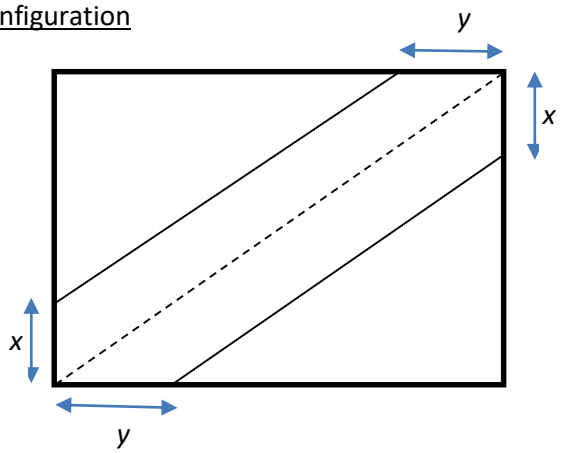
2. <u>Étude d'une deuxième configuration</u>



a. Calculer x.

b. Les bords de la bande centrale sont-ils parallèles à la diagonale du drapeau ?

3. <u>Étude d'une troisième configuration</u>



Dans cette configuration, les bords de la bande centrale sont parallèles à la diagonale du drapeau.

Calculer x et y.

4. <u>Choix définitif du groupe parlementaire</u>
Le choix du groupe parlementaire se porte sur la disposition pour laquelle la bande centrale est de largeur maximale. Quel est son choix ?

Exercice académique numéro 6 (à traiter par les candidats des séries autres que la série S)

3-2-1… Carré

On appelle *carré 1-2-3* un carré de neuf cases tel que :

- chaque case contienne un chiffre de 1 à 9 ;
- le nombre de la deuxième ligne soit le double du nombre de la première ligne ;
- le nombre de la troisième ligne soit le triple du nombre de la première ligne.

Par exemple :

$\times 2$

1	2	6
2	5	2
3	7	8

$\times 3$

$\times 2$

2	1	3
4	2	6
6	3	9

$\times 3$

Les chiffres de 1 à 9 présents dans les différentes cases peuvent se répéter plusieurs fois ou bien ne pas apparaître. Par exemple, dans le premier tableau, le chiffre 2 apparaît trois fois alors que les chiffres 4 et 9 n'apparaissent pas.

1. Recopier et compléter les *carrés 1-2-3* suivants en respectant les chiffres imposés dans les cases grisées :

3	1	2

4	6	8

	7	6

	3	1

3		
		2

2. a. Expliquer pourquoi 111 est le plus petit nombre autorisé pour la première ligne du tableau.

   b. Déterminer le plus grand nombre autorisé pour la première ligne du tableau.

   c. Parmi les chiffres de 1 à 9, un seul est interdit dans la troisième case de la première ligne. Lequel ? Pourquoi ?

3. a. Compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'il dresse la liste de tous les *carrés 1-2-3* :

```
Variables :     a, b et c sont de type nombre
Traitement :    Pour a variant de 111 à ……
                |       Si ( …… ) et (a ne contient pas le chiffre 0)
                |       |       b prend la valeur ……
                |       |       c prend la valeur ……
                |       |       Si (b ne contient pas le chiffre 0) et (c ne contient pas le chiffre 0)
                |       |       |       afficher(a)
                |       |       |       afficher(b)
                |       |       |       afficher(c)
                |       |       FinSi
                |       FinSi
                FinPour
```

   b. Déterminer le nombre de *carrés 1-2-3* différents. Expliquer.

   c. Compléter l'algorithme afin qu'il retrouve le nombre déterminé à la question 3.b.

4. a. Représenter un *carré 1-2-3* ne contenant que trois chiffres différents. Combien en existe-t-il ? Expliquer.

   b. Peut-on représenter un *carré 1-2-3* ne contenant que deux chiffres différents ? Expliquer.

   c. Représenter trois *carrés 1-2-3* dans lesquels un même chiffre apparaît à quatre reprises.

5. Si dans un *carré 1-2-3*, chacun des chiffres de 1 à 9 n'apparaît qu'une seule fois, il est dit *complet*.
   Par exemple :

2	1	9
4	3	8
6	5	7

   Existe-t-il d'autres *carrés 1-2-3 complets* ? Si oui, les représenter tous.

6. Alice affirme : « Il existe des *carrés 1-2-4* ». Bob ajoute alors : « Mais aucun n'est complet ».

   Qu'entendent-ils par-là ? Ont-ils raison ? Expliquer.