MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE LA JEUNESSE ET DES SPORTS
Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2021

Métropole-Europe-Afrique-Orient-Inde

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune. Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents.

La première partie est constituée des exercices nationaux. À son issue, les copies sont ramassées et une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie, constituée des exercices académiques.

Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre. Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

La deuxième de l'épreuve contient trois exercices. Elle est réalisée en équipe : une copie par équipe.

Les candidats de voie générale, ayant suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques, doivent traiter les exercices académiques 1 et 2.

Les autres candidats doivent traiter les exercices académiques 1 et 3.

PARTIE 2

Ce sujet comprend 6 pages, celle-ci incluse.

Exercice académique 1 (à traiter par tous les candidats)

Reflexion (sans accent !)

On considère un nombre entier supérieur ou égal à 10. On dit que ce nombre est :

- **aigu**, si ses chiffres sont écrits dans l'ordre croissant ;
- **grave**, si ses chiffres sont écrits dans l'ordre décroissant ;
- **obtus**, s'il n'est pas aigu ;
- **léger**, s'il n'est pas grave ;
- **à deux chiffres**, s'il est compris entre 10 et 99 ;
- **à trois chiffres**, s'il est compris entre 100 et 999, et ainsi de suite.

Voici quelques exemples pour assimiler ce vocabulaire :

- 12 est un nombre aigu à deux chiffres car $1 \leq 2$;
- 997210 est un nombre grave à six chiffres car $9 \geq 9 \geq 7 \geq 2 \geq 1 \geq 0$;
- 786 est obtus et léger car il n'est ni aigu ($8 > 6$), ni grave ($7 < 8$).

Chaque réponse sera justifiée le plus clairement possible.

1. De quoi les termes « aigu » et « grave » peuvent-ils provenir ?

2. Donner un exemple :
   a. d'un nombre aigu à quatre chiffres ;
   b. d'un nombre grave à quatre chiffres ;
   c. d'un nombre obtus à quatre chiffres ;
   d. d'un nombre léger à quatre chiffres.

3. Un nombre aigu est-il nécessairement léger ? Un nombre grave est-il nécessairement obtus ?

4. Existe-t-il un plus grand nombre aigu ? Existe-t-il un plus grand nombre grave ?

5. Déterminer la plus grande suite d'entiers consécutifs légers à trois chiffres.

6. a. Est-il vrai que la somme de deux nombres aigus est un nombre aigu ?
   b. Est-il vrai que la somme de deux nombres graves est un nombre grave ?
   c. Que peut-on dire de la somme d'un nombre aigu et d'un nombre grave ?

7. a. Le produit de deux nombres aigus peut-il être grave ?
   b. Le produit de deux nombres graves peut-il être aigu ?
   c. Que peut-on dire du produit d'un nombre aigu et d'un nombre grave ?

8. a. Combien existe-t-il de nombres aigus à deux chiffres ? à trois chiffres ?
   b. Quelle est la probabilité qu'un entier choisi au hasard entre 10 et 999 ne soit ni aigu ni grave ?

9. Si dans la définition initiale, les chiffres de l'entier considéré sont écrits dans l'ordre strictement croissant (respectivement décroissant), on dit qu'il est strictement aigu (respectivement grave).
Par exemple, 1349 est strictement aigu (car $1 < 3 < 4 < 9$), alors que 255 ne l'est pas.
   a. Quel est le plus petit nombre strictement aigu à 7 chiffres ?
   b. Quel est le plus petit nombre strictement grave à 7 chiffres ?
   c. Déterminer, s'il existe, le plus grand nombre strictement aigu.
   d. Déterminer, s'il existe, le plus grand nombre strictement grave.

10. On rappelle qu'en Python, pour tous entiers a et b, les instructions $a \,//\, b$ et $a \,\%\, b$ renvoient respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b.
   a. Soit n un entier à trois chiffres. On a programmé en Python la fonction $chiffres\_3$ ci-dessous. Recopier et compléter son script afin qu'elle retourne la liste des chiffres de n.

```
def chiffres_3(n):
    c = []
    for k in range[    ]
        chiffre =[  ]%[  ]
        c = c + [chiffre]
        n =[        ]//[  ]
    return c


>>> chiffres_3(786)
[6, 8, 7]
```

   b. Nous disposons d'une fonction $chiffres$ qui généralise ce procédé, en retournant la liste des chiffres d'un entier $n \geq 10$. Recopier et compléter le script de la fonction Python $nature$ donné ci-dessous, afin qu'elle détermine si n est aigu ou obtus, et grave ou léger.

```
def nature(n):
    c = chiffres(n)
    aigu = True
    grave = True
    [              ]
        if c[i][  ]c[i+1]:
            aigu = False
        if [         ]
            grave =[   ]
    resultat = "Le nombre " + str(n) + " est "
    if aigu:
        resultat = resultat + "aigu et "
    else:
        resultat = resultat + "obtus et "
    if grave:
        resultat = resultat + "grave."
    else:
        resultat = resultat + "léger."
    return [      ]

>>> nature(786)
'Le nombre 786 est obtus et léger.'
```

   c. Rédiger le script de la fonction $chiffres$.

Exercice académique 2 (à traiter par les candidats de voie générale ayant choisi la spécialité mathématiques)

Nombres balançoires

Soit n un entier naturel non nul.

On dit que n est un **nombre balançoire** s'il existe un entier naturel r (appelé **balance**) tel que

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) = (n+1) + \cdots + (n+r).$$

Par exemple, 35 est un nombre balançoire de balance $r = 14$, car

$$1 + 2 + \cdots + 34 = 36 + 37 + \cdots + 49 \quad \text{avec} \quad 49 = 35 + 14.$$

On admet que 1 est le premier nombre balançoire, de balance 0.

Chaque réponse sera justifiée le plus clairement possible.

1. Montrer que 6 est un nombre balançoire, dont on précisera la balance.

2. Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$S_n = 1 + 2 + \cdots + (n-1) \ \text{ et } \ T_n = (n+1) + \cdots + (n+r).$$

   a. En remarquant que $S_n = (n-1) + \cdots + 2 + 1$, démontrer que $S_n = \frac{n(n-1)}{2}$.

   b. En réarrangeant les termes de T_n , justifier que $T_n = rn + S_{r+1}$.

   c. En déduire l'expression de T_n en fonction de n.

3. a. Démontrer que résoudre l'équation $S_n = T_n$ (à n fixé), revient à résoudre l'équation d'inconnue $r \in \mathbb{N}$:

$$r^2 + (2n+1)r + (n - n^2) = 0$$

   b. Démontrer que l'équation précédente n'a qu'une seule solution, qui est :

$$R = \frac{-2n - 1 + \sqrt{8n^2 + 1}}{2}$$

   c. En déduire une condition nécessaire pour que n soit un nombre balançoire, de balance R.

   d. Cette condition nécessaire est-elle également suffisante ?

4. On souhaite déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que $8n^2 + 1$ soit un carré parfait.

   a. Justifier que $8n^2 + 1$ est un carré parfait si et seulement s'il existe un entier m tel que

$$m^2 - 8n^2 = 1 \qquad (E).$$

   b. Justifier que le couple $(m; n) = (3; 1)$ est solution de l'équation (E).

c. Soit k un entier naturel non nul.

On admettra qu'il existe deux familles d'entiers naturels non nuls (m_k) et (n_k) telles que

$$m_k - n_k\sqrt{8} = \left(m - n\sqrt{8}\right)^k \qquad \text{et} \qquad m_k + n_k\sqrt{8} = \left(m + n\sqrt{8}\right)^k$$

où $(m;n)$ est un couple solution de (E).

On remarquera que la suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est la famille des nombres balançoires. On sait d'après la question 4. b. que $(m_1;n_1) = (3;1)$.

i. Sachant que $n_2 = 6$, déterminer la valeur de m_2.

ii. En remarquant que $m_k + n_k\sqrt{8} = \left(3 + \sqrt{8}\right)^k$, démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{cases} m_{k+1} = 3m_k + 8n_k \\ n_{k+1} = m_k + 3n_k \end{cases}$$

iii. Démontrer que pour tout $k \geq 2$, $m_k - 3n_k = -n_{k-1}$, et que $n_{k+1} = 6n_k - n_{k-1}$.

5. a. Soit N un entier naturel non nul. On a rédigé en Python le script de la fonction $balance$:

```
def balance(N):
    L=[1,6]     # deux premiers nombres balançoires
    for [          ]:
        B=6*L[k+1][     ]
        L=[     ]
    return(L)
```

Recopier et compléter ce script, afin que l'appel de la fonction $balance$ affiche la liste des $N+2$ premiers nombres balançoires.

b. En utilisant la capture d'écran de la console Python ci-dessous, déterminer les valeurs de n_7 et n_8.

```
>>> balance(4)
[1, 6, 35, 204, 1189, 6930]
```

Exercice académique 3 (à traiter par les candidats n'ayant pas suivi la spécialité de mathématiques de voie générale)

Autour de la « fonction digitale »

Dans cet exercice, on appelle **« fonction digitale »**, notée f, la fonction qui à chaque nombre entier naturel associe le nombre de « bâtons » nécessaires à l'écriture de cet entier, en utilisant la police ci-dessous :

Source : http://villemin.gerard.free.fr/aJeux1/Allumett/NbCarres.htm

Ainsi, par exemple :

- $f(9) = 6$ car le nombre 9 s'écrit avec 6 bâtons ;
- $f(27) = 8$ car il faut 5 bâtons pour écrire le nombre 2 et 3 bâtons pour écrire le nombre 7.

1. Calculer l'image de 2021 par la fonction f.

2. La fonction f est-elle croissante ?

3. Quel est l'entier naturel inférieur à 1000 dont l'image par la fonction f est la plus grande ?

4. On considère une liste ordonnée de dix entiers naturels. Proposer une condition suffisante pour que leurs images respectives soient des termes d'une suite arithmétique de raison 6.
Cette condition est-elle nécessaire ?

5. Déterminer le plus grand puis le plus petit antécédent de 2021 par la fonction f.

6. a. Les entiers compris entre 0 et 4 ont-ils un antécédent par la fonction f ?
   b. Montrer que tout entier supérieur ou égal à 5 admet au moins un antécédent par la fonction f.

7. a. Existe-t-il des entiers naturels m et n tels que $f(m+n) = f(m) + f(n)$?
   b. Existe-t-il des entiers naturels p et q tels que $f(p \times q) = f(p) \times f(q)$?

8. *Digitaliser un horaire*, c'est calculer l'image par la fonction f des chiffres composant cet horaire affiché sur un réveil digital. Par exemple, la digitalisation de 12h04 est égale à 17 car $f(1204) = 17$.

   a. Calculer la digitalisation de l'horaire 17h38.
   b. Déterminer les horaires qui ont la plus petite digitalisation au cours d'une journée.
   c. Déterminer les horaires qui ont la plus grande digitalisation au cours d'une journée.
   d. En considérant tous les horaires de 00h00 à 23h59, calculer la digitalisation totale d'une journée.

9. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $f(k) < k$, pour tout entier $k \geq n$.
<u>Indication</u> : on pourra admettre que, pour tout entier naturel $p \geq 3$, on a $7p < 10^{p-1}$.