Méthode de double fausse position

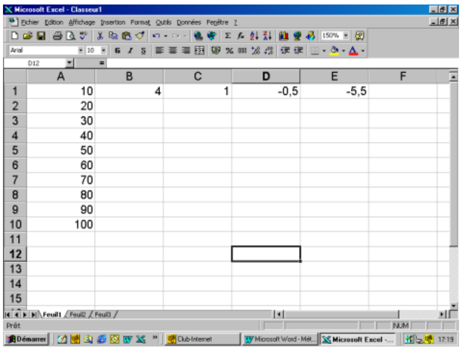
Problème : (d'après Christophore Clavius, « Arithmetica Prattica », Rome, 1586)
Un homme est entré dans un verger et il y a cueilli des pommes. Mais le verger avait trois portes gardées chacune par un gardien. Cet homme partagea les pommes avec le premier garde et lui en donna une de plus ; puis, il partagea avec le deuxième et lui en donna une de plus ; enfin, il partagea avec le troisième et lui en donna une de plus. Il sortit en ayant cinq pommes.
Combien de pommes a-t-il cueilli ?

I – Travail préparatoire à la maison :

Mettre le problème en équation et le résoudre.

II – Résolution à l'aide d'un tableur (EXCEL)

1°) Les nombres dans la colonne A correspondent aux nombres de pommes que le voleur pourra avoir (10, 20, 30, …, 100).
Dans A1 : 10
Pour obtenir 20 dans la cellule A2, on ajoute … à la cellule A1
donc A2 = A1 + …
Etc. Donc on recopie vers le bas jusqu'à la cellule A10.



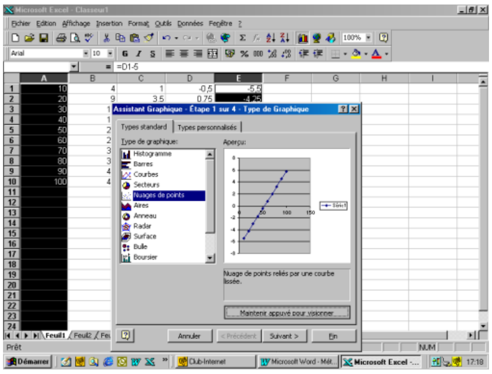
2°) Les nombres dans la colonne B correspondent aux nombres de pommes restant après le 1^er^ garde :

$$\text{Dans B1 : } = A1 - \left(\frac{A1}{2} + 1\right)$$

Puis recopier vers le bas de la cellule B2 à la cellule B10.

3°) Remplir de même les colonnes C et D (correspondant au nombre de pommes restants après les 2ème, puis le 3ème garde).

4°) Dans la colonne E, on calcule l'erreur : c'est à dire la différence entre le nombre de pommes restant à la sortie et le nombre de pommes que le voleur devrait avoir, à savoir 5.
Déterminer la formule à écrire dans la cellule E1, puis recopier vers le bas jusqu'à la cellule E10.



5°) Graphique :
Nuage de points : Colonne A en abscisse ; Colonne E en ordonnée:
En maintenant la touche CTRL appuyée, sélectionner les colonnes A et E, puis cliquer sur l'icône graphique.

6°) a- Que peut-on conjecturer sur les points obtenus ?

b- En prenant deux valeurs de *x* du tableau et leurs images correspondantes, déterminer la formule associée à la courbe.

7°) Par lecture graphique donner la réponse au problème (par exemple en utilisant Graphmatica).

8°) Comparer votre résultat par celui obtenu à la maison.

III – Résolution à l'aide les fonctions.

Soit f une fonction définie par $f(x) = \frac{1}{8}x - \frac{27}{4}$

1°) Quelle est la nature de la fonction ?
Donner le tableau de variation de cette fonction.

2°) On considère les nombres réels x_1 et x et leurs images $f(x_1) = e_1$ et $f(x) = 0$.

a- Ecrire le taux de variation avec ces valeurs.

b- Combien vaut-il ?

3°) On considère x_1 et x_2 et leurs images $f(x_1) = e_1$ et $f(x_2) = e_2$.

a- Ecrire le taux de variation.

b- Combien vaut-il ?

4°) A l'aide des questions 2 et 3, exprimer x en fonction de x_1, e_1, x_2 et e_2.

5°) Application numérique : on pose $x_1 = 10$ et $x_2 = 90$.
A l'aide du tableau Excel, calculer x.

6°) Conclure quant au problème posé.

IV – Résolution à l'aide de la géométrie.

1°) Pour modéliser le problème géométriquement, on considère deux valeurs :
D'après III : $x_1 = 10$, l'erreur est $e_1 = \ldots$
$x_2 = 90$, l'erreur est $e_2 = \ldots$

2°) On considère 3 points A, B, C alignés dans cet ordre tel que AB = 10 mm et AC = 90 mm.

3°) On trace les perpendiculaires à (AB) respectivement menées par B et par C.

4°) Soit E et F situés de part et d'autre de (BC) tel que BE est la distance à 0 de $10e_1$ et CF est la distance à 0 de $10e_2$.

5°) Soit M le point d'intersection des droites (BC) et (EF).

6°) Exprimer $\tan \widehat{BEM}$ et $\tan \widehat{CFM}$.

7°) Exprimer MC en fonction de MB et en déduire une nouvelle écriture de $\tan \widehat{CFM}$.

8°) Montrer que les angles $\widehat{BEM}$ et $\widehat{CFM}$ sont de même mesure.

9°) En déduire MB, puis MA.

10°) Comparer le résultat obtenu avec III – 6°).

V – Conclusion.

Les résolutions proposées dans cette étude reposent sur la méthode dite de double fausse position. Elle permet de trouver la solution au problème posé en utilisant successivement deux fausses « solutions » .