

On considère un triangle BCA rectangle en C .

On note :

- O le centre du demi-cercle circonscrit (\mathcal{C}) au triangle ABC ;
- H le pied de la hauteur tombée de C ;
- (Δ) la médiatrice de $[BC]$. (Δ) coupe (\mathcal{C}) en T ;
- P le pied de la hauteur tombée de H dans le triangle CHO .

On pose $AH = a$ et $BH = b$.

Préliminaires

1. Faire une figure.
2. Préciser le signe de a et de b .

Partie A

On appelle moyenne arithmétique des nombres a et b le nombre $m = \frac{a+b}{2}$.
Que représente géométriquement m ?

Partie B

1. Ecrire la propriété de Pythagore dans le triangle rectangle BCA .
2. Montrer que $AB = a + b$.
3. Développer $(a + b)^2$.
4. Dédire des questions 1., 2. et 3. de la présente partie que :

$$AC^2 + AB^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

5. Ecrire la propriété de Pythagore dans les triangles AHC et BHC rectangle en H .
6. Dédire des questions 4. et 5. de la présente partie que :

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2CH^2 + a^2 + b^2$$

7. Calculer CH en fonction de a et b .

On appelle moyenne géométrique des nombres a et b le nombre g représenté sur la figure par CH .

Partie C

On appelle moyenne harmonique des nombres a et b le nombre h tel que $\frac{2}{h} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

1. Montrer que $\frac{1}{h} = \frac{a+b}{2ab}$.
En déduire l'expression de h en fonction de a et b .
2. Calculer le cosinus de l'angle \widehat{HCO} dans le triangle CHO rectangle en H .
3. Calculer le cosinus de l'angle \widehat{HCP} dans le triangle CPH rectangle en P .
4. A l'aide des résultats des questions 2. et 3. de la présente partie, montrer que :

$$\frac{CP}{CH} = \frac{CH}{OC}$$

En déduire une expression de CP

5. Remplacer CH^2 et OC dans l'expression de CP par leurs valeurs en fonction de a et b .
En déduire $CP = h$

Partie D

On appelle moyenne quadratique des nombres a et b le nombre q tel que $q = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$.

1. Ecrire la propriété de Pythagore dans le triangle HOT rectangle en O .
2. Montrer que $OT^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.
3. Calculer OH^2 en fonction de a et b .
4. Montrer que $HT^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}$.
En déduire $HT = q$

Partie E

On rappelle que $OT = m$, $CH = g$, $CP = h$ et que $HT = q$.

1. Classer les nombres m , g , h et q .
2. Où C doit-il être placé pour que les moyennes soient égales ?