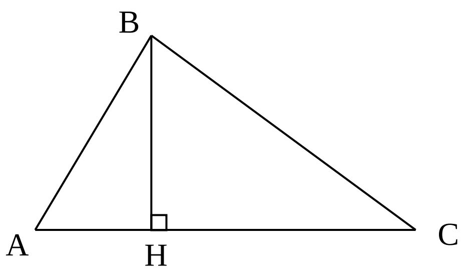
FORMULE DE HERON

On considère le triangle suivant où H représente le pied de la hauteur tombée de B.



On note BC = a, CA = b et AB = c.

1°) Dans le triangle ABH, exprimer BH en fonction de c et de $\hat{A}$.

2°) Dans le triangle ABH, exprimer AH en fonction de c et de $\hat{A}$.

3°) En déduire CH en fonction de b, c et $\hat{A}$.

4°) En écrivant la propriété de Pythagore dans le triangle BCH, exprimer BH^2 en fonction de a, b, c et $\hat{A}$.

5°) Montrer que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$ (Relation de PYTHAGORE généralisée).

6°) En déduire l'expression de $\cos\hat{A}$ en fonction de a, b et c.

7°) En utilisant la relation $\sin^2\hat{A} + \cos^2\hat{A} = 1$, montrer que :

$$\sin^2\hat{A} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)}{(2bc)^2}$$

8°) Soit $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ le demi périmètre du triangle ABC. Montrer que l'on peut écrire :

$$\sin\hat{A} = \frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

9°) En déduire que l'aire S du triangle ABC s'exprime par :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad \text{(Formule de Héron)}$$