

Construction d'un segment de longueur $\sqrt{a^2 + b^2 + 3ab}$

(D'après un problème de la revue Tangente)

Partie 1 : Relation métrique dans le triangle rectangle

On considère un triangle ABC rectangle en A .

Soit H le pied de la hauteur issue de A .

Méthode 1 : utilisation de la trigonométrie

- 1) Montrer que les angles \widehat{ABH} et \widehat{HAC} ont même mesure.
- 2) Calculer $\tan \widehat{ABH}$ et $\tan \widehat{HAC}$.
- 3) En déduire que $AH^2 = BH \times HC$.

Méthode 2 : utilisation du théorème de Pythagore

- 1) Développer $(BH+HC)^2$.
- 2) Ecrire la relation de Pythagore dans chacun des triangles rectangles et en déduire que $AH^2 = BH \times HC$.

Partie 2 : Vers la moyenne géométrique

- 1) Tracer un segment $[BC]$ de longueur 10 cm et placer le point H sur $[BC]$ tel que $BH=2\text{cm}$.
- 2) Construire un triangle ABC rectangle en A tel que H soit le pied de la hauteur issue de A . Citer la propriété utilisée.
- 3) En utilisant le résultat de la **partie 1**, calculer AH .

Partie 3 : Transformation d'écriture

Développer $(a + b)^2$ et en déduire une écriture de $a^2 + b^2 + 3ab$ en fonction de $a + b$ et de ab .

Partie 4 : construction du segment

- 1) On considère la figure donnée en annexe où $BH = a$ et $HC = b$.
En utilisant la **partie 2** :
 - a) Construire un point A tel que ABC soit rectangle en A et tel que H soit le pied de la hauteur issue de A .
 - b) Exprimer AH en fonction de a et b .
- 2)
 - a) Construire le point D tel que $ADBH$ soit un rectangle.
 - b) Exprimer BD et BC en fonction de a et de b .
 - c) Démontrer que $DC = \sqrt{a^2 + b^2 + 3ab}$

Annexe

