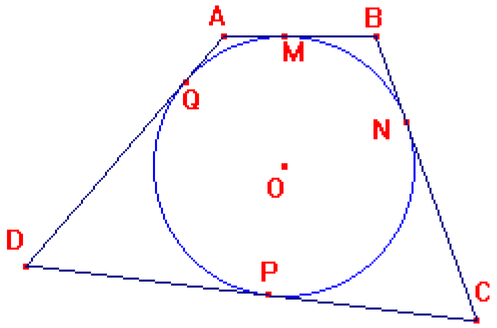
Quadrilatères possédant un cercle inscrit : Calcul du rayon de ce cercle.

Dans ce devoir, on utilisera sans démonstration le théorème suivant :

> Un quadrilatère convexe possède un cercle inscrit si et seulement si la somme des longueurs de ses côtés opposés est la même pour les deux couples de côtés opposés.

On s'intéresse dans ce qui suit à un quadrilatère convexe dont les longueurs des côtés sont 6 ; 12 ; 18 et 12, ces longueurs étant énumérées selon un sens de parcourt du quadrilatère.
6+18 = 12+12, ce quadrilatère possède donc un cercle inscrit.



Les notations sont celles de la figure ci-contre.
On a AB = 6, BC = 12 ; CD = 18 et DA = 12.
M, N, P et Q sont les points où le cercle inscrit est tangent aux côtés de ABCD.

On note r le rayon du cercle inscrit.
Ce rayon peut prendre plusieurs valeurs.

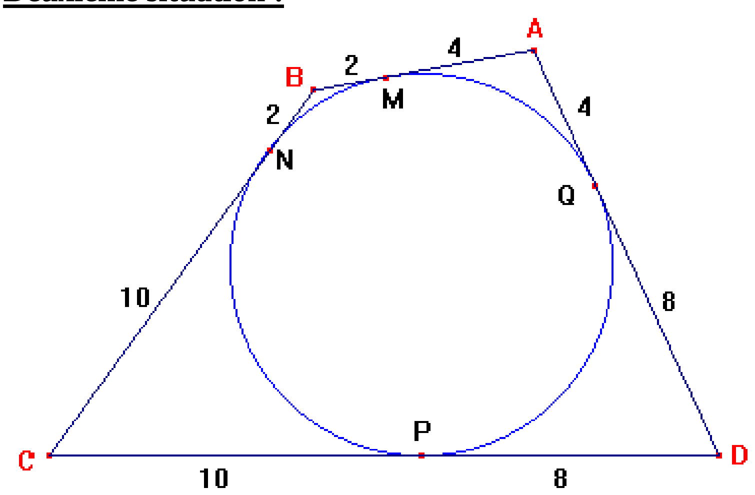
Première situation : M est le milieu de [AB].

1) Montrer que si M est le milieu de [AB] alors les quatre triangles OQA, OAM, OMB et OBN sont isométriques. En déduire que $\widehat{DAB} = \widehat{ABC}$.

2) Montrer que DAM et MBC sont isométriques. En déduire que M est sur la médiatrice de [DC], puis que ABCD est un trapèze.

3) Montrer qu'alors $r = 3\sqrt{3}$.

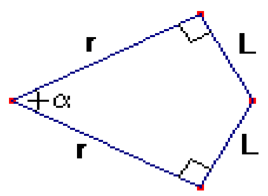
Deuxième situation :



Cette situation est représentée sur la figure ci-contre.

3) On rappelle que si $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

alors $\tan x = a \Leftrightarrow x = \arctan a$.



Montrer que $\alpha = 2\arctan\left(\dfrac{L}{r}\right)$

4) Montrer que si le quadrilatère ci-dessus est exinscriptible et que l'on note r le rayon du cercle inscrit, alors r est solution de l'équation :

$$\arctan\left(\frac{2}{r}\right)+\arctan\left(\frac{10}{r}\right)+\arctan\left(\frac{8}{r}\right)+\arctan\left(\frac{4}{r}\right)=\pi$$

5) Montrer, à l'aide des formules d'addition des fonctions sinus et cosinus,que :

$$\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}.$$

6) En déduire que :

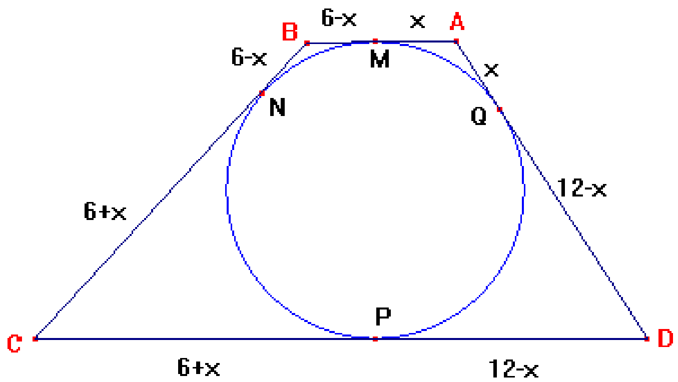
$$\tan\left(\arctan\left(\frac{2}{r}\right)+\arctan\left(\frac{10}{r}\right)\right)=\frac{12r}{r^2-20} \quad \text{et que} \quad \tan\left(\arctan\left(\frac{8}{r}\right)+\arctan\left(\frac{4}{r}\right)\right)=\frac{12r}{r^2-32}.$$

7) En déduire que

$$\tan\left(\arctan\left(\frac{2}{r}\right)+\arctan\left(\frac{10}{r}\right)+\arctan\left(\frac{8}{r}\right)+\arctan\left(\frac{4}{r}\right)\right)=\frac{24r(r^2-26)}{(r^2-32)(r^2-20)-144r^2}.$$

8) En déduire que $r=\sqrt{26}$.

<u>Situation générale :</u>



Un calcul semblable montre alors que $r=\sqrt{-x^2+6x+18}$ où $0<x<6$.

9) En déduire que $3\sqrt{2}<r\leq 3\sqrt{3}$.

Connaissances utilisées :

- Triangles isométriques.
- Formules d'addition des fonctions sinus et cosinus.
- $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.
- Variations d'une fonction du second degré.