Stage inter-établissements
Collège Monge – Lycée Clos Maire
à Beaune

Mathématiques –
Recueil d'exercices
et de problèmes

2007 - 2008

Introduction

Ce recueil a été élaboré dans le cadre d'un stage inter-établissements, initié en décembre 2007, entre le collège Monge et le lycée Clos Maire à Beaune. Il est le fruit d'un travail commun entre les professeurs de mathématiques de ces deux établissements. Son but est de proposer une série d'exercices et de problèmes regroupés par thèmes, abordables aussi bien au collège qu'au lycée, mais avec des approches et des niveaux d'approfondissement différents. S'ils sont traités de façon régulière par les professeurs des deux cycles – ce qui est fortement conseillé – ils peuvent contribuer à tisser une culture mathématique commune chez les élèves qui poursuivent leur scolarité dans ces deux établissements et, de ce fait, à introduire davantage de continuité et de cohérence dans les apprentissages.

Les thèmes proposés sont conçus pour être posés au collège Monge ou au lycée Clos Maire. Les professeurs ont toute liberté pour aborder les notions qui les intéressent ou qui correspondent au niveau et à l'hétérogénéité de leurs classes. Ils ont également toute latitude pour conduire autour de ces thèmes des activités en classe entière, en module (en Seconde), ou constituer des sujets de devoirs à la maison. Ces sujets peuvent concerner des groupes restreints d'élèves ou une classe entière. Chaque énoncé est rédigé à l'aide d'un questionnement, mais les professeurs ont toute liberté pour s'en emparer à leur guise : les problèmes peuvent être utilisés tels quels, modifiés ou raccourcis au gré de chacun, en fonction des classes. Il ne faut pas hésiter non plus à proposer certains des sujets en classe de Cinquième ou de Quatrième, quitte à adapter quelques questions ; ils s'inscrivent tous dans les programmes du premier ou du second cycle. Une approche informatique peut également être envisagée pour certains d'entre eux.

Le recueil se compose pour l'instant d'une seule partie intitulée MOYENNES, sur laquelle s'est centré le travail conduit en 2007-2008. Il est prévu que ce fascicule soit évolutif ; chaque nouvelle année scolaire amènera de nouvelles productions sur d'autres thèmes. Chacun des problèmes est précédé d'un commentaire indiquant, entre autres, le niveau auquel il peut être abordé. L'ensemble de la production appartient désormais aux professeurs des deux établissements, il participe d'une mémoire commune.

Ce recueil doit beaucoup à Monsieur Dominique LANTERNIER, Proviseur du lycée Clos Maire, et à Monsieur Rémy RAVAUT, Principal du collège Monge, qui sont à l'initiative de l'opération de liaison entre les deux établissements. Il faut remercier tout particulièrement les professeurs des deux cycles qui ont accepté de bonne grâce de se prêter à l'aventure de ce fascicule : leur travail a taillé les pierres de son élaboration, leur charisme a cimenté son aboutissement.

Robert FERACHOGLOU,
Chargé de mission sur poste d'IPR en Mathématiques.

Thème 1

Moyennes

A – Qu'est-ce qu'une moyenne ?

- Problème 1 – Moyenne arithmétique, moyenne harmonique
- Problème 2 – Découverte de quatre différentes moyennes

B – Les moyennes : à quoi ça sert ?

- Problème 3 – Pourcentages et moyenne géométrique
- Problème 4 – Pesées et moyenne géométrique (1)
- Problème 5 – Pesées et moyenne géométrique (2)
- Problème 6 – Plaques moyennes et moyenne quadratique
- Problème 7 – Vitesse et moyenne harmonique
- Problème 8 – Taux de change et moyenne harmonique
- Problème 9 – Base « moyenne » d'un trapèze et moyenne harmonique

C – Comment visualiser les moyennes ?

- Problème 10 – Hauteur d'un triangle rectangle et moyenne géométrique
- Problème 11 – Toutes les moyennes dans une même figure
- Problème 12 – Une visualisation graphique

D – Comparaison des différentes moyennes

- Problème 13 – Comparaison géométrique
- Problème 14 – Comparaison algébrique
- Problème 15 – Comparaison de quelques moyennes de n nombres

PROBLÈME N° 1 : Moyenne arithmétique et moyenne harmonique

Objectif, niveau et difficultés – Il s'agit de revisiter rapidement la notion de moyenne arithmétique, qui doit être la seule connue *a priori* en début de collège, mais aussi de montrer que ce n'est pas la seule. Le questionnement permet de découvrir la notion de moyenne harmonique à travers une situation simple. Ce sujet peut être abordé dès la fin de la classe de 5$^{\text{ème}}$ et ne nécessite que très peu de prérequis. Il est sûrement mieux adapté au niveau de la 4$^{\text{ème}}$, notamment avec la manipulation des inverses en fin de sujet. Le calcul des différentes moyennes peut servir de prétexte à une initiation au maniement d'un tableur.

A – Première partie : moyenne de notes

1. Un élève a obtenu deux notes : 9 et 14. Quelle est la moyenne de ces deux notes ?

2. Un élève a eu cinq notes : 5 ; 8 ; 10 ; 20 ; 14. Quelle est la moyenne de ces cinq notes ?

Vocabulaire : ce type de moyenne est appelé « **moyenne arithmétique** ».

La moyenne arithmétique de deux nombres *a* et *b* est le nombre *m* vérifiant l'égalité : $m = \frac{a+b}{2}$.

À retenir : pour calculer la moyenne arithmétique de plusieurs valeurs :
- on ajoute toutes ces valeurs ;
- on divise la somme obtenue par le nombre de valeurs.

3. Un élève a obtenu au premier trimestre cinq notes en mathématiques : 7 ; 12 ; 9 ; 7 ; 11. Une sixième note est prévue.
   a) Quelle doit être cette sixième note pour que la moyenne soit égale à 10 ? à 11 ?
   b) L'élève peut-il espérer avec ses six notes obtenir une moyenne égale à 12 ?

Deuxième partie : vitesse moyenne

Julien, qui habite Beaune, décide d'aller à Chagny à pied. 16 km séparent les deux villes. Julien couvre la distance à la vitesse moyenne de 4 km/h.
Pour revenir à Beaune, il emprunte le vélo de son ami chagnotin. Il effectue alors le retour à Beaune à la vitesse moyenne de 16 km/h.

1. Quelle est la distance aller-retour parcourue par Julien ?

2. Quelle est la durée totale du trajet aller-retour ?

3. En déduire la vitesse moyenne de Julien sur l'aller-retour ?

4. La vitesse moyenne est-elle la moyenne arithmétique des deux vitesses ?

5. Vérifier l'égalité : $\frac{1}{6,4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{4}\right)$.

<u>Vocabulaire</u> : on dit que le nombre 6,4 est la ***moyenne harmonique*** des nombres 16 et 4.
La moyenne harmonique de deux nombres non nuls a et b est le nombre h vérifiant l'égalité :

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

<u>À retenir</u> : pour calculer la moyenne harmonique de deux nombres non nuls :
- on calcule les inverses de ces deux nombres ;
- on calcule la moyenne arithmétique de ces deux inverses ;
- on prend l'inverse du résultat obtenu.

Troisième partie : calculons ces deux moyennes

Recopier et compléter le tableau suivant où m et h désignent respectivement la moyenne arithmétique et la moyenne harmonique des deux nombres a et b.

a	***b***	***m***	***h***	
4	12			**cas n°1**
10	2,5			**cas n°2**
	15	45		**cas n°3**
12			8	**cas n°4**

Détailler tous les calculs en dehors du tableau.

PROBLÈME N° 2 : Découvrons quatre différentes moyennes

Objectif, niveau et difficultés – L'objectif est analogue à celui du problème précédent : la découverte de quatre types de moyennes articule le questionnement, au travers de quatre situations d'usage courant. Le niveau indiqué est celui de la 3ème ou de la 2nde ; le sujet peut constituer un bon entraînement au maniement des radicaux, qui interviennent ici en situation dans un contexte non artificiel. Ici encore, l'utilisation d'un tableur est particulièrement indiquée dans la 5ème partie.

A – Première partie : moyenne de notes

1. Un élève a obtenu deux notes : 9 et 14. Quelle est la moyenne de ces deux notes ?

2. Un élève a eu cinq notes : 5 ; 8 ; 10 ; 20 ; 14. Quelle est la moyenne de ces cinq notes ?

3. Un élève a obtenu *n* notes : x_1 ; x_2 ; x_3 ; …… ; x_n. On note *m* la moyenne de ces *n* notes.
Exprimer la moyenne *m* de ces *n* notes à l'aide des nombres *n*, x_1, x_2, …, x_n.

Vocabulaire : ce type de moyenne est appelé « **moyenne arithmétique** ».

La moyenne arithmétique de deux nombres *a* et *b* est le nombre *m* vérifiant l'égalité : $m = \dfrac{a+b}{2}$.

À retenir : pour calculer la moyenne arithmétique de plusieurs valeurs :
- on ajoute toutes ces valeurs ;
- on divise la somme obtenue par le nombre de valeurs.

4. Un élève a obtenu au premier trimestre cinq notes en mathématiques : 7 ; 12 ; 9 ; 7 ; 11. Une sixième note est prévue.
c) Quelle doit être cette sixième note pour que la moyenne soit égale à 10 ? à 11 ?
d) L'élève peut-il espérer avec ses six notes obtenir une moyenne égale à 12 ?

Deuxième partie : vitesse moyenne

Julien, qui habite Beaune, décide d'aller à Chagny à pied. 16 km séparent les deux villes. Julien couvre la distance à la vitesse moyenne de 4 km/h.
Pour revenir à Beaune, il emprunte le vélo de son ami chagnotin. Il effectue alors le retour à Beaune à la vitesse moyenne de 16 km/h.

1. Quelle est la distance aller-retour parcourue par Julien ?

2. Quelle est la durée totale du trajet aller-retour ?

3. En déduire la vitesse moyenne de Julien sur l'aller-retour ?

4. La vitesse moyenne est-elle la moyenne arithmétique des deux vitesses ?

5. Vérifier l'égalité : $\frac{1}{6{,}4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{4}\right)$.

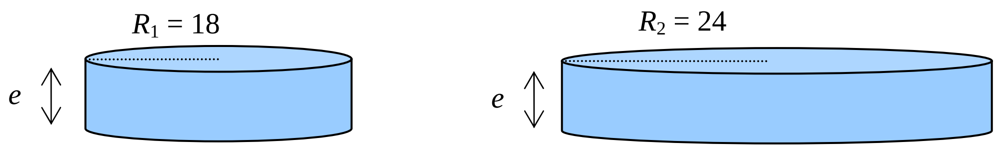
<u>Vocabulaire</u> : on dit que le nombre 6,4 est la ***moyenne harmonique*** des nombres 16 et 4.
La moyenne harmonique de deux nombres non nuls a et b est le nombre h vérifiant l'égalité :

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

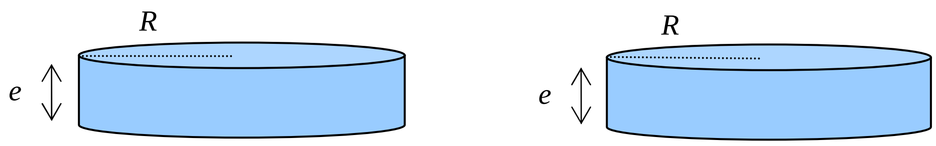
<u>À retenir</u> : pour calculer la moyenne harmonique de deux nombres non nuls :
- on calcule les inverses de ces deux nombres ;
- on calcule la moyenne arithmétique de ces deux inverses ;
- on prend l'inverse du résultat obtenu.

<u>Troisième partie : notion de plaque moyenne</u>

On possède deux plaques métalliques de formes cylindriques, de même épaisseur e, mais de rayons différents : $R_1 = 18$ et $R_2 = 24$ (en cm). (Figure ci-après.)



Nous souhaitons fondre ces deux plaques pour en fabriquer deux autres, de même épaisseur e, et de même rayon R :



On rappelle que le volume d'une cylindre s'exprime par la relation : $V = \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$.

1. Calculer le volume total de métal utilisé dans les deux premiers jetons. (Exprimer ce nombre en fonction de π.)

2. Exprimer en fonction de R et de π la somme des volumes des deux jetons transformés.

3. En déduire que le rayon R des jetons transformés ne dépend pas de l'épaisseur e, et calculer R.
4. Peut-on dire que R est la moyenne arithmétique des nombres 18 et 24 ?
5. Vérifier l'égalité : $R = \sqrt{\frac{18^2 + 24^2}{2}}$.

Vocabulaire : on dit que le nombre R est la ***moyenne quadratique*** des nombres 18 et 24.
La moyenne quadratique de deux nombres non nuls a et b est le nombre q vérifiant l'égalité :

$$q = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} .$$

À retenir : pour calculer la moyenne quadratique de deux nombres non nuls :
- on calcule la moyenne arithmétique de leurs carrés ;
- on prend la racine carrée du résultat obtenu.

Quatrième partie : quadrature d'un rectangle

On considère un rectangle de dimensions 5 cm et 9,8 cm.
1. Quelle est, en cm^2, l'aire de ce rectangle ?
2. On veut construire un carré qui a la même aire que ce rectangle. Calculer la longueur c du côté de ce carré.
3. Le nombre c est-il la moyenne arithmétique des nombres 5 et 9,8 ?

Vocabulaire : on dit que le nombre c est la ***moyenne géométrique*** des nombres 5 et 9,8.
La moyenne géométrique de deux nombres non nuls a et b est le nombre g vérifiant l'égalité :

$$g = \sqrt{a \times b} .$$

À retenir : pour calculer la moyenne géométrique de deux nombres non nuls :
- on calcule leur produit ;
- on prend la racine carrée du résultat obtenu.

Cinquième partie : calculons ces quatre moyennes

Reproduire et compléter le tableau suivant en utilisant les définitions des moyennes m, g, h et q données dans les encadrés précédents. Détailler les calculs « hors tableau » ou utiliser un tableur.

a	b	m	g	h	q	
4	16					**cas n°1**
14		8				**cas n°2**
12			6			**cas n°3**
4				6		**cas n°4**
7					5	**cas n°5**

PROBLÈME N° 3 : Pourcentages et moyenne géométrique

Objectif, niveau et difficultés – Il s'agit ici d'étudier une situation relativement riche, quoiqu'assez complexe, et l'objectif est double. On introduit tout d'abord la notion de coefficient multiplicateur en liaison avec un pourcentage d'évolution (augmentation ou diminution) et, d'autre part, on met en scène la notion de pourcentage moyen d'évolution sur deux périodes consécutives ; c'est là qu'intervient un autre type de moyenne : la moyenne géométrique. Ce sujet peut être abordé dès la 3ème, avec prudence ; il est particulièrement indiqué en 2nde et s'inscrit parfaitement dans les programmes de 1ère ES ou de 1ère STG.

Partie A – Augmenter, diminuer en pourcentage

1. Un produit coûte 250 €, son prix augmente de 30 %.
   a) Quel sera le prix A de ce produit après l'augmentation ?
   b) Justifier l'égalité : $A = 250 \times \left(1 + \frac{30}{100}\right)$.

2. Le prix d'un produit est D euros, et ce prix augmente de 30 %.

   Justifier que le nouveau prix A de ce produit est donné par l'égalité : $A = D \times \left(1 + \frac{30}{100}\right)$.

3. Le prix d'un produit est D euros, et ce prix augmente de t %.

   Justifier que le nouveau prix A de ce produit est donné par l'égalité : $A = D \times \left(1 + \frac{t}{100}\right)$.

À retenir :
Augmenter un nombre de t % revient donc à le multiplier par le **coefficient multiplicateur :**

$$\left(1 + \frac{t}{100}\right).$$

4. Quel est le coefficient multiplicateur associé à une baisse de 15 % ?

5. Quel est le coefficient multiplicateur associé à une baisse de t % ?

À retenir
Diminuer un nombre de t % revient donc à le multiplier par le **coefficient multiplicateur :**

$$\left(1 - \frac{t}{100}\right).$$

6. Compléter les phrases suivantes :
   a) « Multiplier un nombre par 1,05, c'est augmenter ce nombre de …. % ».
   b) « Multiplier un nombre par 2 revient à augmenter ce nombre de …. % ».
   c) « Multiplier un nombre par 0,4, c'est diminuer ce nombre de …. % ».
   d) « Multiplier un nombre par 0,03 revient à diminuer ce nombre de …. % ».

Partie B – Coefficient moyen annuel

Définition - Si a et b sont deux nombres strictement positifs :

- la moyenne arithmétique des nombres a et b est le nombre : $m = \dfrac{a+b}{2}$;
- la moyenne géométrique des nombres a et b est le nombre : $g = \sqrt{ab}$.

Le prix d'un produit était de 300 € le 01/01/2006.

1. Durant l'année 2006, le prix de ce produit subit une augmentation de 21 %. Quel est le nouveau prix A de ce produit le 31/12/2006 ?

2. Durant l'année 2007, le prix de ce produit subit une nouvelle augmentation de 44 %. Quel est le nouveau prix B de ce produit le 31/12/2007 ?

3. Julien affirme « Puisque $21+44=65$, j'en déduis qu'entre le 01/01/2006 et le 31/12/2007, le prix a subi une augmentation globale de 65 %. ».
   Margaux réplique : « Il ne faut pas raisonner sur les taux d'évolution mais sur les coefficients multiplicateurs ; le prix a été multiplié au total par $1,21\times1,44$, c'est-à dire 1,7424. Il a donc augmenté de 74,24 %. ».
   Lequel des deux a raison ? Justifier votre réponse.

4. On appelle taux moyen annuel d'évolution le nombre t tel que deux hausses successives de t % sont équivalentes à la hausse globale sur les deux années.
   a) Sur l'exemple précédent, vérifier que la hausse globale du prix sur les deux années correspond à deux hausses successives de 32 %.
   b) Le taux moyen annuel est-il égal à la moyenne arithmétique des deux taux ?

5. Le coefficient multiplicateur annuel moyen est donc égal à 1,32.
   Vérifier que ce coefficient est égal à la moyenne géométrique des coefficients multiplicateurs 1,21 et 1,44.

PROBLÈME N° 4 : Pesées et moyenne géométrique (1)

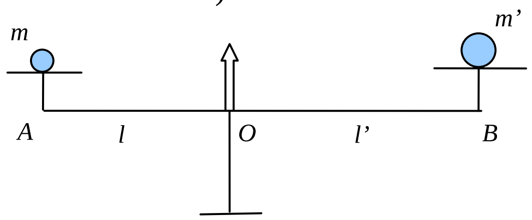
Objectif, niveau et difficultés – La notion de moyenne géométrique intervient ici à travers une situation issue de la physique, sur laquelle la règle de base est donnée. Le questionnement est bâti pour être posé en classe de 3ème.

Définition - Si a et b sont deux nombres strictement positifs :

- la moyenne arithmétique des nombres a et b est le nombre : $m = \dfrac{a+b}{2}$;
- la moyenne géométrique des nombres a et b est le nombre : $g = \sqrt{ab}$;
- la moyenne quadratique des nombres a et b est le nombre : $q = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$;
- la moyenne harmonique des nombres a et b est le nombre : $h = \dfrac{2ab}{a+b}$.

A – Préliminaire : la loi d'Archimède

Une loi physique, la loi d'Archimède, dit que la balance ci-dessous est en équilibre si la condition suivante est vérifiée : $m \times l = m' \times l'$, où m et m' sont les masses (exprimées dans la même unité) posées sur chaque plateau, et l et l' sont les longueurs OA et OB des deux fléaux de la balance (l et l' sont aussi exprimés dans la même unité).



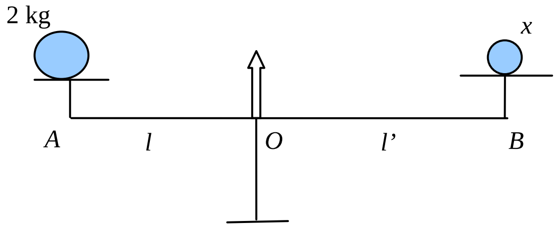
Application numérique

Si $m = 3\,\text{kg}$, $l = 20\,\text{cm}$ et $l' = 60\,\text{cm}$, calculer m' pour que la balance soit en équilibre.

B - Problème

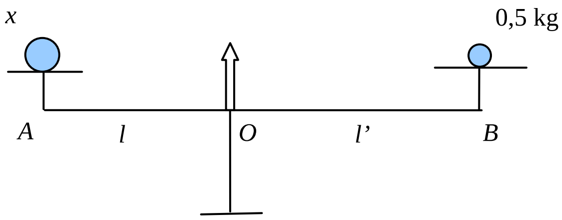
On possède une balance du type précédent, et diverses masses marquées ; on souhaite déterminer la masse inconnue d'un objet. Cette masse est notée x (en kg). La difficulté est que l'on ne peut pas procéder comme ci-dessus car on ne connait pas les longueurs $l = OA$ et $l' = OB$ des fléaux de la balance. De plus, on ne possède aucun instrument pour les mesurer. Cependant, on va résoudre le problème grâce aux mathématiques, à l'aide d'une astuce détaillée ci-après : la double pesée.

1. On réalise une première pesée, où l'équilibre est schématisé ci-dessous.



   a) Ecrire l'égalité correspondante.
   b) En déduire une expression du quotient $\frac{l}{l'}$

2. La seconde pesée donne le nouvel équilibre suivant.



   a) Ecrire l'égalité correspondante.
   b) En déduire une nouvelle expression du quotient $\frac{l}{l'}$.

3. En utilisant les deux questions précédentes, écrire une équation dont la seule inconnue est *x*, puis calculer *x*.

4. Calculer les moyennes arithmétique, géométrique, harmonique et quadratique des nombres 2 et 0,5.

5. Dans un problème de double pesée, quel type de moyenne ce problème suggère-t-il de considérer ?

PROBLÈME N° 5 : Pesées et moyenne géométrique (2)

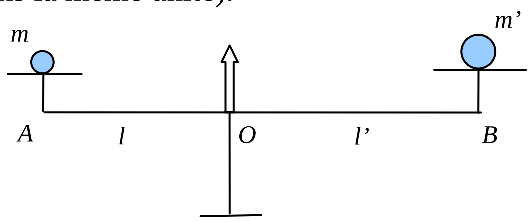
Objectif, niveau et difficultés – Ce sujet est l'analogue du précédent ; il reprend la même situation avec un questionnement plutôt adapté à la classe de 2^{nde}.

Définition - Si a et b sont deux nombres strictement positifs :

- la moyenne arithmétique des nombres a et b est le nombre : $m = \dfrac{a+b}{2}$;
- la moyenne géométrique des nombres a et b est le nombre : $g = \sqrt{ab}$;
- la moyenne quadratique des nombres a et b est le nombre : $q = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$;
- la moyenne harmonique des nombres a et b est le nombre : $h = \dfrac{2ab}{a+b}$.

A – Préliminaire : la loi d'Archimède

Une loi physique, la loi d'Archimède, dit que la balance ci-dessous est en équilibre si la condition suivante est vérifiée : $m \times l = m' \times l'$, où m et m' sont les masses (exprimées dans la même unité) posées sur chaque plateau, et l et l' sont les longueurs OA et OB des deux fléaux de la balance (l et l' sont aussi exprimés dans la même unité).



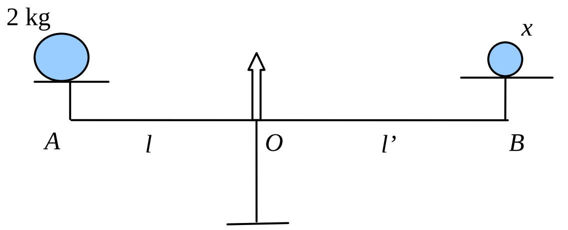
Application numérique

Si $m = 3$ kg, $l = 20$ cm et $l' = 60$ cm, calculer m' pour que la balance soit en équilibre.

B – Problème

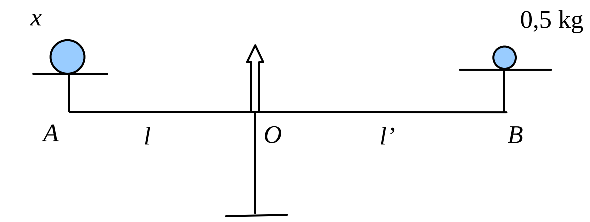
On possède une balance du type précédent, et diverses masses marquées ; on souhaite déterminer la masse inconnue d'un objet. Cette masse est notée x (en kg). La difficulté est que l'on ne peut pas procéder comme ci-dessus car on ne connait pas les longueurs $l = OA$ et $l' = OB$ des fléaux de la balance. De plus, on ne possède aucun instrument pour les mesurer. Cependant, on va résoudre le problème grâce aux mathématiques, à l’aide d’une astuce détaillée ci-après : la double pesée.

1. On réalise une première pesée, où l’équilibre est schématisé ci-dessous.



   a) Ecrire l’égalité correspondante.
   b) En déduire une expression du quotient $\frac{l}{l'}$

2. La seconde pesée donne le nouvel équilibre suivant.



   a) Ecrire l’égalité correspondante.
   b) En déduire une nouvelle expression du quotient $\frac{l}{l'}$.

3. En utilisant les deux questions précédentes, calculer *x*.

4. Dans un problème de double pesée, quel type de moyenne ce problème suggère-t-il de considérer ?

5. Un objet de masse inconnue *m* est équilibré par une masse de 3,6 kg lorsqu’il est placé sur le plateau de droite d’une balance, et par une masse de 4,9 kg lorsqu’il est placé sur le plateau de gauche.
   Quelle est la masse *m* de cet objet ?

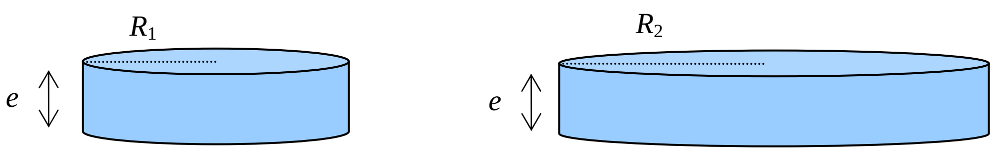
PROBLÈME N° 6 : Plaque moyenne et moyenne quadratique

<u>Objectif, niveau et difficultés</u> – Le problème fait intervenir la notion de moyenne quadratique à partir d'une situation géométrique, déjà entrevue dans le problème 2. Il est envisageable au niveau de la 3ème car il fait intervenir la notion de racine carrée et, d'autre part, il présuppose la connaissance d'autres types de moyennes que l'élève est censé avoir déjà côtoyées, même si les définitions sont rappelées dans l'encadré initial. Il ne présente pas de difficulté technique remarquable.

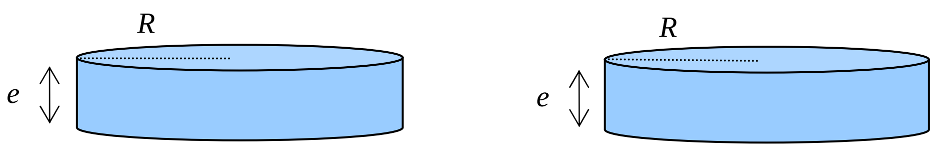
<u>Définition</u> - Si a et b sont deux nombres strictement positifs :

- la moyenne arithmétique des nombres a et b est le nombre : $m = \dfrac{a+b}{2}$;
- la moyenne géométrique des nombres a et b est le nombre : $g = \sqrt{ab}$;
- la moyenne quadratique des nombres a et b est le nombre : $q = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$;
- la moyenne harmonique des nombres a et b est le nombre : $h = \dfrac{2ab}{a+b}$.

On possède deux plaques métalliques de formes cylindriques, de même épaisseur e, mais de rayons différents qu'on note R_1 et R_2. (Figure ci-après.)



Nous souhaitons fondre ces deux plaques pour en fabriquer deux autres, de même épaisseur e, et de même rayon R :



On rappelle que le volume d'une cylindre s'exprime par la relation : $V = \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$.

1. Dans cette question, on suppose que $R_1 = 18$ et $R_2 = 24$ (en cm).

a) Calculer le volume total de métal utilisé dans les deux premiers jetons. (Exprimer ce nombre en fonction de π.)
b) Exprimer en fonction de *R* et de π la somme des volumes des deux jetons transformés.
c) En déduire que le rayon *R* des jetons transformés ne dépend pas de l'épaisseur *e*, et calculer *R*.
d) Peut-on dire que *R* est la moyenne arithmétique des nombres 18 et 24 ?

2. Cas général : dans cette question, R_1 et R_2 sont quelconques.
   a) Exprimer le volume total de métal en fonction de R_1 et R_2, à partir des plaques de départ.
   b) Exprimer ce même volume en fonction de *R*, à partir des deux plaques recomposées.
   c) En déduire une expression de *R* en fonction de R_1 et R_2.
   d) Peut-on dire que *R* est une moyenne de R_1 et R_2 ? Si oui, laquelle ?

3. Dans ce cas, on donne $R_1 = 30$ et $R_2 = 50$ (en cm). Calculer la valeur exacte de *R*.

PROBLÈME N° 7 : Vitesse et moyenne harmonique

Objectif, niveau et difficultés – La situation envisagée a déjà été abordée dans les problèmes 1 et 2. Il s'agit d'un prolongement de l'étude au niveau de la classe de Seconde, car on y envisage une étude fonctionnelle. Un devoir à la maison en 3$^{\text{ème}}$ est également concevable, à condition de négocier en douceur la question 4 de la 2$^{\text{ème}}$ partie, ainsi que la 3$^{\text{ème}}$ partie, dont le résultat est intéressant et surprenant.

Première partie : vitesse moyenne sur un aller-retour

Julien, qui habite Beaune, décide d'aller à Chagny à pied. 16 km séparent les deux villes. Julien couvre la distance à la vitesse moyenne de 4 km/h.
Pour revenir à Beaune, il emprunte le vélo de son ami chagnotin. Il effectue alors le retour à Beaune à la vitesse moyenne de 16 km/h.

1. Quelle est la distance aller-retour parcourue par Julien ?
2. Quelle est la durée totale du trajet aller-retour ?
3. En déduire la vitesse moyenne de Julien sur l'aller-retour ?
4. La vitesse moyenne est-elle la moyenne arithmétique des deux vitesses ?
5. Vérifier l'égalité : $\frac{1}{6{,}4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{4}\right)$.

Vocabulaire : on dit que le nombre 6,4 est la ***moyenne harmonique*** des nombres 16 et 4.
La moyenne harmonique de deux nombres non nuls a et b est le nombre h vérifiant l'égalité :

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

À retenir : pour calculer la moyenne harmonique de deux nombres non nuls :
- on calcule les inverses de ces deux nombres ;
- on calcule la moyenne arithmétique de ces deux inverses ;
- on prend l'inverse du résultat obtenu.

Deuxième partie : généralisation

Cette fois, Julien part de Beaune à vélo et roule, au petit bonheur. Il parcourt une distance d (en km) à la vitesse constante a (en km par h). Il effectue le retour par le même chemin à la vitesse constante b (en km par h).

1. Quelle est la distance aller-retour parcourue par Julien ?
2. Quelle est la durée totale du trajet aller-retour ?
3. En déduire que la vitesse moyenne v de Julien sur l'aller-retour est la moyenne harmonique de a et b.
4. Démontrer l'égalité : $v = \dfrac{2ab}{a+b}$.

<u>Troisième partie : comment augmenter la vitesse moyenne</u>

Le lendemain, l'infatigable Julien enfourche à nouveau son vélo et parcourt un trajet aller à la vitesse constante de 20 km/h. Il effectue le retour à la vitesse constante x (en km/h). On note alors $v(x)$ sa vitesse moyenne sur l'ensemble du trajet aller-retour.

1. Montrer que $v(x)$ s'exprime par l'égalité : $v(x) = \dfrac{40x}{x+20}$.
2. À quelle vitesse Julien doit-il rouler sur son trajet retour pour que la vitesse moyenne sur l'ensemble du trajet soit égale à : 24 km/h ? 30 km/h ? 35 km/h ?
   Cette dernière valeur est-elle réaliste ?
3. Démontrer l'égalité : $v(x) = 40 - \dfrac{800}{x+20}$. En déduire que $v < 40$.

   Interpréter ce résultat.

PROBLÈME N° 8 : Taux de change moyen, et moyenne harmonique

<u>Objectif, niveau et difficultés</u> – Il s'agit de présenter une autre situation intéressante faisant intervenir la notion de moyenne harmonique. Les outils mathématiques ne dépassent pas ceux de la classe de $3^{ème}$; cependant, le sujet est ardu car la notion de taux de change est relativement difficile à comprendre. En $3^{ème}$, on peut s'en tenir à la première partie, où le travail s'effectue sur un exemple numérique ; l'ensemble du sujet peut être posé en Seconde.

<u>Définition</u> - Si a et b sont deux nombres strictement positifs :

- la moyenne arithmétique des nombres a et b est le nombre : $m = \dfrac{a+b}{2}$;
- la moyenne géométrique des nombres a et b est le nombre : $g = \sqrt{ab}$;
- la moyenne quadratique des nombres a et b est le nombre : $q = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$;
- la moyenne harmonique des nombres a et b est le nombre : $h = \dfrac{2ab}{a+b}$.

Taux de change moyen.

Partie A **: taux de change moyen dans un cas particulier.**

1. À la fin de l'année 2006, désirant se rendre aux Etats-Unis, un touriste français change ses euros (de symbole €) en dollars US (de symbole $). Le taux de change €/$ est égal à : $a = 1,26$. Cela signifie qu'avec 1 € il obtient 1,26 $.
Il désire obtenir 630 $. Combien d'euros doit-il changer ?

2. En février 2008, ce même touriste retourne aux Etats-Unis. Il change l'équivalent en euros de 630 $, mais le taux €/$ a évolué ; il est alors égal à : $b = 1,575$.
Combien d'euros a-t-il changés ?

3. On désire calculer le taux de change moyen de l'euro, noté t, sur l'ensemble de ces deux transactions, c'est-à-dire le nombre t de dollars que l'on obtient pour 1 euro.
a) Quelle somme en euro a-t-on obtenue pour un dollar en 2006 ? et en 2008 ?
b) En déduire la somme moyenne, en euro, obtenue pour un dollar sur ces deux années.
c) Calculer alors la valeur de t.

4. Calculer les moyennes arithmétique, géométrique, harmonique et quadratique des nombres 1,26 et 1,575 (on donnera, si nécessaire, les valeurs arrondies au millième).

5. Parmi les quatre moyennes précédentes, quelle est celle qui donne la valeur exacte du taux de change moyen ?

Partie B **: Cas général**

Pour vous rendre aux Etats–Unis, vous changez une première fois l'équivalent en euros de 100 $ à un taux €/$ égal à *a*. Quelques jours plus tard, vous changez encore l'équivalent en euros de 100 $ mais à un taux €/$ égal à *b*.

1. Exprimer, en fonction de *a* et *b*, la somme totale, en euros, échangée sur l'ensemble des deux transactions.

2. En déduire, en fonction de *a* et *b*, le taux de change moyen de l'euro, noté *t*.

3. a) Vérifier l'égalité : $\frac{1}{t}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$.

b) Conclure sur le type de moyenne utilisé.

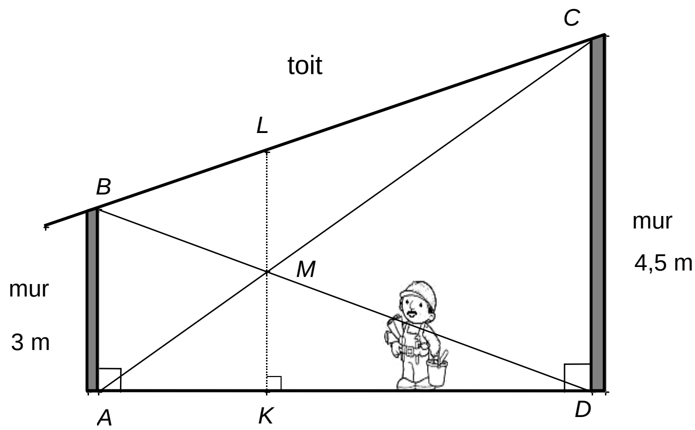
PROBLÈME N° 9 : Base « moyenne » d'un trapèze et moyenne harmonique

Objectif, niveau et difficultés – Une étude géométrique originale constitue le premier point fort de ce problème ; il s'agit de calculer la longueur d'un segment particulier dans un trapèze : le segment parallèle aux bases et passant par le point d'intersection des diagonales. Le lien avec la moyenne harmonique est alors établi : c'est le deuxième intérêt de l'étude. Ce problème est abordable avec une classe de 3ème de bon niveau, ou en classe de Seconde.

A – Le problème du bricoleur

Un bricoleur désire faire des travaux dans sa maison de campagne, schématisée ci-contre (la figure n'est pas en vraie grandeur…).

Il dispose deux échelles $[AC]$ et $[BD]$, l'une contre l'autre, comme le montre la figure. Elles se "croisent" en un point *M*.
Les points *K*, *M* et *L* sont alignés.



Notre bricoleur mesure 1,75 m et il se pose des questions :

- À quelle hauteur se croisent les deux échelles ? Peut-il passer sous les échelles sans se baisser ?
- S'il monte s'installer au point *M*, pourra-t-il atteindre le toit ? Ou, au contraire, sera-t-il obligé de s'accroupir ?
- S'il désire poser une cloison joignant les points *K* et *L*, quelle serait sa hauteur ?

1. a) En utilisant le théorème de Thalès dans le triangle ABD, montrer que : $\frac{3}{KM} = 1 + \frac{MB}{MD}$.

(On pourra utiliser l'égalité suivante : $DB = DM + MB$.)

b) En utilisant une autre configuration, déterminer la valeur exacte du rapport $\frac{MB}{MD}$.

c) En déduire la valeur de KM. Répondre à la première question du bricoleur.

2. Par un raisonnement analogue :

a) Montrer l'égalité : $\frac{3}{ML} = 1 + \frac{MA}{MC}$.

b) Déterminer le rapport $\frac{MA}{MC}$.

c) En déduire la valeur de ML. Répondre aux autres questions.

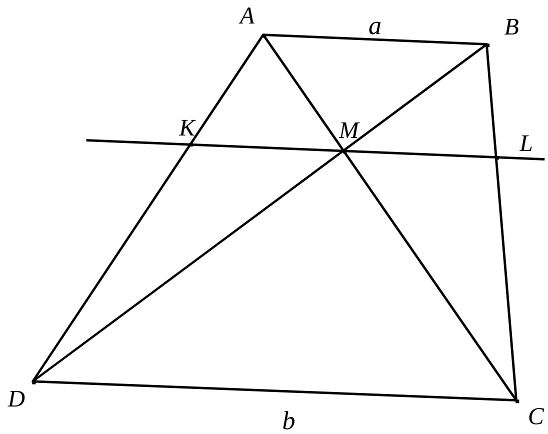
3. Calculer les moyennes arithmétique, géométrique, harmonique et quadratique des nombres 3 et 4,5 (on donnera, si nécessaire, les valeurs arrondies au millième).

4. Parmi les quatre moyennes précédentes, quelle est celle qui donne la valeur exacte de la longueur KL ?

B – Généralisation : « base moyenne » d'un trapèze

Sur la figure ci-contre, $ABCD$ est un trapèze de bases $[AB]$ et $[CD]$.
Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en un point M.
La parallèle à (AB) passant par M coupe les côtés $[AD]$ et $[BC]$ respectivement en K et L.
On note : $AB = a$ et $CD = b$.

Le but du problème est de calculer la longueur KL, uniquement en fonction de a et b.



1. En utilisant le théorème de Thalès dans le triangle ABD, montrer que : $\frac{a}{KM} = 1 + \frac{MB}{MD}$.

(On pourra utiliser l'égalité suivante : $DB = DM + MB$.)

2. Par un raisonnement analogue, montrer que : $\frac{a}{ML} = 1 + \frac{MA}{MC}$.

3. En utilisant une autre configuration, exprimer les rapports $\frac{MB}{MD}$ et $\frac{MA}{MC}$ en fonction de a et b.

4. Déduire des questions précédentes l'égalité : $\frac{1}{KM} = \frac{1}{ML} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

5. Montrer que le point M est le milieu du segment $[KL]$, puis que la longueur KL est la moyenne harmonique des longueurs a et b. À l'aide d'une « évidence géométrique », comparer la moyenne harmonique de deux nombre à chacun de ces nombres.

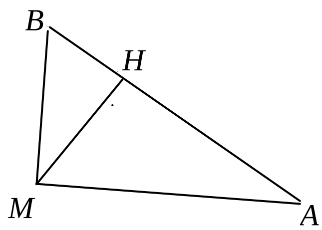
6. Quelle est la nature du trapèze lorsque $a = b$? Que devient la longueur KM dans ce cas-là ? En déduire que la moyenne harmonique des deux nombres coïncide avec la moyenne arithmétique lorsque ces deux nombres sont égaux.

<u>Note</u> : du fait de la propriété établie dans la question **5**, on peut qualifier le segment $[KL]$ de « base moyenne » du trapèze.

PROBLÈME N° 10 : Hauteur d'un triangle rectangle et moyenne géométrique

Objectif, niveau et difficultés – C'est un problème classique faisant intervenir la moyenne géométrique. Il est incontournable au collège comme au lycée, car la configuration à l'étude permet la construction d'un segment de longueur $\sqrt{ab}$ (c'est le segment [*MH*]) à partir de deux autres de longueurs respectives *a* et *b* (les segments [*AH*] et [*BH*]). Une partie de l'étude peut être abordée en 5ème (où l'on peut montrer que les angles $\widehat{MAH}$ et $\widehat{HMB}$ ont la même mesure), les deux premières méthodes sont possibles en 3ème, la dernière, basée sur des triangles semblables, est du niveau de la 2nde. L'étude peut être poursuivie en enseignement de spécialité de Terminale S, où il est intéressant d'étudier les différentes similitudes transformant l'un des triangles en l'autre (les trois triangles *AMB*, *AHM* et *MHB* étant semblables).

Dans un triangle *AMB* rectangle en *M*, *H* est le pied de la hauteur issue de *M*.
On pose $AH = a$ et $BH = b$.
L'objectif de l'exercice est d'exprimer ***MH en fonction de a et b*** par trois méthodes différentes.



1ère méthode

A - Dans un cas particulier
Ici, on prend *AH* = 3 cm et *HB* = 2 cm.

1. Faire une figure.

2. a) Montrer que $AM^2 = MH^2 + 9$ et que $MB^2 = MH^2 + 4$.
   b) En déduire l'égalité : $AB^2 = 2 \times MH^2 + 13$.
   c) Calculer alors la valeur exacte de la hauteur *MH*.
   d) Montrer que l'on a l'égalité : $MH^2 = AH \times HB$.

3. Application : en déduire une construction à la règle et au compas d'un segment de longueur $\sqrt{6}$ à partir d'un segment [*AB*] mesurant 5 cm et d'un point *H* placé sur [*AB*] à 3 cm du point *A*. (Faire la figure en laissant les traits de constructions.)

B – Dans le cas général
Dans cette partie, les longueurs *AH* et *BH* ne sont pas précisées ; on note $AH = a$ et $BH = b$.

1. Appliquer le théorème de Pythagore dans les trois triangles de la figure.

2. Prouver alors l'égalité : $AB^2 = 2\times MH^2 + a^2 + b^2$.

3. En déduire une expression réduite de *MH* en fonction des nombres *a* et *b*.
(On pourra écrire : $AB^2 = (AH + HB)^2 = ...$.)

> <u>Définition</u> : étant donnés deux nombres positifs *a* et *b*, le nombre $g = \sqrt{ab}$ est appelé la *moyenne géométrique* des nombres *a* et *b*.

<u>2ème méthode</u> :

<u>A – Dans un cas particulier</u> :

On pourra utiliser les deux résultats suivants : $\cos 60° = \frac{1}{2}$ et $\tan 60° = \sqrt{3}$.

Ici, on considère un triangle *AMB* rectangle en *M* tel que : $\widehat{MAB} = 60°$ et $AM = 4$ cm.

1. Faire une figure.

2. a) Calculer la longueur *AH*.
   b) Calculer la longueur *MH*, et mettre le résultat sous la forme $a\sqrt{b}$, où *a* et *b* sont entiers et *b* est le plus petit possible.

3. a) Calculer la mesure en degré de l'angle $\widehat{HMB}$.
   b) En déduire la longueur *HB*.

4. Montrer que l'on a l'égalité : $MH^2 = AH \times HB$.

<u>B – Dans le cas général</u>

1. Montrer que $\widehat{MAH} = \widehat{HMB}$.

2. En exprimant $\tan\widehat{MAH}$ dans deux triangles différents, prouver l'égalité : $MH^2 = AH \times HB$.
On retrouve alors la même expression de *MH* en fonction de *a* et *b* qu'à la fin de la 1ère méthode, ce qui est rassurant ! Ainsi, *MH* est la moyenne géométrique des nombres *a* et *b*.

<u>3ème méthode</u> : (niveau Seconde)

1. Montrer que les triangles *AHM* et *MHB* sont semblables.

2. En déduire l'égalité $MH^2 = AH \times HB$.

PROBLÈME N° 11 : Toutes les moyennes dans une même figure

Objectif, niveau et difficultés – L'étude de cette configuration très riche est envisageable avec les outils de la classe de 3ème, mais elle ne serait pas méprisable en 2nde. Ce problème sera repris et poursuivi dans le problème 13, où l'on envisage en outre de comparer géométriquement les quatre moyennes envisagées.

Définition - Si a et b sont deux nombres strictement positifs :

- la moyenne arithmétique des nombres a et b est le nombre : $m = \dfrac{a+b}{2}$;
- la moyenne géométrique des nombres a et b est le nombre : $g = \sqrt{ab}$;
- la moyenne quadratique des nombres a et b est le nombre : $q = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$;
- la moyenne harmonique des nombres a et b est le nombre : $h = \dfrac{2ab}{a+b}$.

1. Faire une figure de belle taille d'après la description suivante :
   « Soit [AB] un segment quelconque de milieu O. Tracer un demi-cercle (Γ) de diamètre [AB]. On considère H un point quelconque du segment [OA], distinct de O et de A. La perpendiculaire en H à la droite (AB) coupe le demi-cercle (Γ) en M. »
   Cette figure sera complétée au fur et à mesure.

   On pose : $AH = a$ et $HB = b$ (avec $a < b$).

2. a) Calculer OM en fonction de a et de b.
   b) La longueur [OM] représente une certaine moyenne des nombres a et b. Laquelle ?

3. a) Montrer que les angles $\widehat{MAH}$ et $\widehat{BMH}$ ont la même mesure.
   b) En déduire l'égalité : $\dfrac{MH}{AH} = \dfrac{HB}{MH}$, puis exprimer MH en fonction de a et b.
   c) La longueur MH représente une certaine moyenne des nombres a et b. Laquelle ?

4. Soit (Γ') le demi-cercle de centre O passant par H et qui coupe le segment [OM].
   La perpendiculaire en O à la droite (OM) coupe (Γ') en G.

a) Exprimer le rayon de (Γ') en fonction de a et de b ? En déduire que $OG = \dfrac{b-a}{2}$.

b) En déduire une expression de MG en fonction de a et b.

c) La longueur MG représente une certaine moyenne des nombres a et b. Laquelle ?

5. a) On considère le point N du segment $[OM]$ tel que $MN = MH$.
La parallèle à la droite (AB) passant par N coupe le segment $[MH]$ en K.
Exprimer MK en fonction de a et de b.

b) La longueur MK représente une certaine moyenne des nombres a et b. Laquelle ?

PROBLÈME N° 12 : Une visualisation graphique

Objectif, niveau et difficultés – Il s'agit de remarquer que les quatre moyennes envisagées relèvent d'une seule et même problématique, qui est en fait d'ordre fonctionnel. La question 1 ne prend tout son intérêt que si une autre des questions est envisagée. Les questions 1 et 2 peuvent être posées en classe de 3ème mais sont difficiles à exploiter à ce niveau. Il est plutôt conseillé d'aborder les questions 1, 2, 3 en classe de 2nde ou de 1ère, la question 4 attendra la Terminale : logarithme oblige !

Définition - Si a et b sont deux nombres strictement positifs :

- la moyenne arithmétique des nombres a et b est le nombre : $m = \dfrac{a+b}{2}$;
- la moyenne géométrique des nombres a et b est le nombre : $g = \sqrt{ab}$;
- la moyenne quadratique des nombres a et b est le nombre : $q = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$;
- la moyenne harmonique des nombres a et b est le nombre : $h = \dfrac{2ab}{a+b}$.

L'objectif de ce problème est de visualiser ces moyennes à l'aide de la représentation graphique de fonctions bien choisies.

1. Soit f la fonction définie pour tout réel x par : $f(x) = x$.
   a) Le plan est rapporté à un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. Tracer la courbe représentative (C_f) de la fonction f dans ce repère.
   b) Soit A et B deux points de cette courbe d'abscisses respectives a et b (avec $a > 0$ et $b > 0$). Quelles sont les ordonnées y_A et y_B des points A et B ?
   c) Placer sur la courbe le point M dont l'ordonnée est $\dfrac{y_A + y_B}{2}$. Quelle est alors l'abscisse du point M ?

2. Soit g la fonction définie pour tout réel x positif par : $g(x) = x^2$.
   a) Le plan est rapporté à un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. Tracer la courbe représentative (C_g) de la fonction g dans ce repère.
   b) Soit A et B deux points de cette courbe d'abscisses respectives a et b (avec $a > 0$ et $b > 0$). Quelles sont les ordonnées y_A et y_B des points A et B ?

c) Placer sur la courbe le point M dont l'ordonnée est $\frac{y_A + y_B}{2}$. Quelle est alors l'abscisse du point M ?

3. Soit h la fonction définie pour tout réel x strictement positif par : $h(x) = \frac{1}{x}$.

a) Le plan est rapporté à un repère $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$. Tracer la courbe représentative (C_h) de la fonction h dans ce repère.

b) Soit A et B deux points de cette courbe d'abscisses respectives a et b (avec $a > 0$ et $b > 0$). Quelles sont les ordonnées y_A et y_B des points A et B ?

c) Placer sur la courbe le point M dont l'ordonnée est $\frac{y_A + y_B}{2}$. Quelle est alors l'abscisse du point M ?

4. Soit k la fonction définie pour tout réel x strictement positif par : $k(x) = \ln x$.

a) Le plan est rapporté à un repère $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$. Tracer la courbe représentative (C_k) de la fonction k dans ce repère.

b) Soit A et B deux points de cette courbe d'abscisses respectives a et b (avec $a > 0$ et $b > 0$). Quelles sont les ordonnées y_A et y_B des points A et B ?

c) Placer sur la courbe le point M dont l'ordonnée est $\frac{y_A + y_B}{2}$. Quelle est alors l'abscisse du point M ?

<u>Information</u>. Plus généralement, soit F une fonction définie sur $]0\ ;+\infty[$ telle que l'équation $F(x) = 0$ admet une solution unique pour tout réel $x > 0$. Pour tous nombres strictement positifs a et b, on définit la « F-moyenne » des nombres a et b le nombre m_F défini par l'égalité :

$F(m_F) = \frac{F(a) + F(b)}{2}$.

Ainsi, les moyennes envisagées dans ce problème sont des cas particuliers de ce type de moyenne, pour des fonctions F bien choisies.

PROBLÈME N° 13 : Comparaison géométrique

Objectif, niveau et difficultés – Ce problème reprend et approfondit le problème 11, en utilisant pleinement certaines propriétés élémentaires de la configuration étudiée pour comparer les différentes moyennes. Il peut être abordé en 3$^{\text{ème}}$, avec certaines aides, ou en classe de 2$^{\text{nde}}$. La comparaison des différentes moyennes aux nombres *a* et *b* est d'un abord plus délicat à l'aide de cette configuration ; il vaut mieux l'envisager de façon algébrique, ce qui sera proposé dans le problème suivant.

Définition - Si *a* et *b* sont deux nombres strictement positifs :

- la moyenne arithmétique des nombres *a* et *b* est le nombre : $m = \dfrac{a+b}{2}$;
- la moyenne géométrique des nombres *a* et *b* est le nombre : $g = \sqrt{ab}$;
- la moyenne quadratique des nombres *a* et *b* est le nombre : $q = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$;
- la moyenne harmonique des nombres *a* et *b* est le nombre : $h = \dfrac{2ab}{a+b}$.

1. Faire une figure de belle taille d'après la description suivante :
   « Soit [*AB*] un segment quelconque de milieu *O*. Tracer un demi-cercle (Γ) de diamètre [*AB*]. On considère *H* un point quelconque du segment [*OA*], distinct de *O* et de *A*. La perpendiculaire en *H* à la droite (*AB*) coupe le demi-cercle (Γ) en *M*. »
   Cette figure sera complétée au fur et à mesure.

   On pose : $AH = a$ et $HB = b$ (avec $a < b$).

2. a) Calculer *OM* en fonction de *a* et de *b*.
   b) La longueur [*OM*] représente une certaine moyenne des nombres *a* et *b*. Laquelle ?

3. a) Montrer que les angles $\widehat{MAH}$ et $\widehat{BMH}$ ont la même mesure.
   b) En déduire l'égalité : $\dfrac{MH}{AH} = \dfrac{HB}{MH}$, puis exprimer *MH* en fonction de *a* et *b*.
   c) La longueur *MH* représente une certaine moyenne des nombres *a* et *b*. Laquelle ?

4. Soit (Γ') le demi-cercle de centre *O* passant par *H* et qui coupe le segment [*OM*].
   La perpendiculaire en *O* à la droite (*OM*) coupe (Γ') en *G*.

a) Exprimer le rayon de (Γ') en fonction de a et de b ? En déduire que $OG = \dfrac{b-a}{2}$.

b) En déduire une expression de MG en fonction de a et b.

c) La longueur MG représente une certaine moyenne des nombres a et b. Laquelle ?

5. a) On considère le point N du segment [OM] tel que $MN = MH$.
La parallèle à la droite (AB) passant par N coupe le segment [MH] en K.
Exprimer MK en fonction de a et de b.

 b) La longueur MK représente une certaine moyenne des nombres a et b. Laquelle ?

6. Ranger dans l'ordre croissant les quatre moyennes : m, g, h et q **en utilisant des propriétés à caractère géométrique** qui vous permettront de comparer les longueurs OM, MH, MG et MK. (*Indice* : *« quel est le plus grand côté d'un triangle rectangle ? »*.)

PROBLÈME N° 14 : Comparaison algébrique

Objectif, niveau et difficultés – Ce problème assez technique est particulièrement recommandé en classe de 2nde, où l'on étudie en détail les problèmes de comparaison. Les outils principalement utilisés sont le théorème de rangement des carrés et les produits remarquables. En collège, on peut s'en tenir à l'aspect numérique et aux conjectures (partie A).

Définition - Si a et b sont deux nombres strictement positifs :

- la moyenne arithmétique des nombres a et b est le nombre : $m = \dfrac{a+b}{2}$;
- la moyenne géométrique des nombres a et b est le nombre : $g = \sqrt{ab}$;
- la moyenne quadratique des nombres a et b est le nombre : $q = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$;
- la moyenne harmonique des nombres a et b est le nombre : $h = \dfrac{2ab}{a+b}$.

A – Approche numérique et conjectures

1. Reproduire et compléter le tableau suivant en utilisant les définitions de m, g, h et q données dans la définition précédente. Détailler les calculs « hors tableau » ou utiliser un tableur.

a	***b***	***m***	***g***	***h***	***q***	
4	16					**cas n°1**
14		8				**cas n°2**
12			6			**cas n°3**
4				6		**cas n°4**
7					5	**cas n°5**

2. Que peut-on conjecturer concernant le rangement des six nombres :

a ; b ; m ; g : h : q.

B - Démonstrations

On se place dans le cas où : $0 < a < b$.

1. a) Exprimer $b^2 - q^2$ en fonction de a et b ; en déduire le signe de $b^2 - q^2$.

b) Comparer alors b et q.

2. a) Exprimer $q^2 - m^2$ en fonction de a et b, et mettre l'expression sous forme factorisée.
   b) Comparer alors q et m.

3. En déterminant comme précédemment le signe de $m^2 - g^2$, comparer m et g.

4. a) Prouver l'égalité : $g^2 - h^2 = ab \times \dfrac{(a-b)^2}{(a+b)^2}$.
   b) Comparer alors g et h.

5. Exprimer $h - a$ en fonction de a et b, puis comparer h et a.

6. Conclure en rangeant dans l'ordre croissant les six nombres a, b, m, g, h et q.

PROBLÈME N° 15 : Comparaison de quelques moyennes de *n* nombres

Objectif, niveau et difficultés – Ce problème est plutôt réservé à la classe de Terminale S. Il montre que la question des moyennes est généralisable, et en particulier la comparaison de ces moyennes. Le cas de l'égalité est également envisagé. La question 2, plus difficile sans doute à cause du symbolisme, peut être édulcorée en s'en tenant à quelques valeurs particulières de l'entier *n*.

Définition - Si $a_1, a_2, ..., a_n$ sont *n* nombres réels strictement positifs ($n \geq 2$) :

- la moyenne arithmétique des nombres $a_1, a_2, ..., a_n$ est le nombre : $m = \dfrac{a_1 + ... + a_n}{n}$;
- la moyenne géométrique des nombres $a_1, a_2, ..., a_n$ est le nombre : $g = \sqrt[n]{a_1 \times ... \times a_n}$;
- la moyenne quadratique des nombres $a_1, a_2, ..., a_n$ est le nombre : $q = \sqrt{\dfrac{{a_1}^2 + ... + {a_n}^2}{n}}$;
- la moyenne harmonique des nombres $a_1, a_2, ..., a_n$ est le nombre *h* tel que : $\dfrac{1}{h} = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{a_1} + ... + \dfrac{1}{a_n}\right)$.

Le but de ce problème est de comparer ces différentes moyennes.

1. Calculer ces différentes moyennes dans le cas où $n = 3$, $a_1 = 4$, $a_2 = 10$, et $a_3 = 25$.

2. Comparaison de *q* et *m*
   a) Etant donné *n* nombres strictement positifs $a_1, ..., a_n$ ($n \geq 1$), démontrer l'égalité :
   $$n({a_1}^2 + ... + {a_n}^2) = (a_1 + ... + a_n)^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)^2 .$$
   (À défaut d'une démonstration complète, on pourra se contenter de démontrer le résultat pour $n = 2$, pour $n = 3$ et éventuellement $n = 4$.)
   b) En déduire que $m \leq q$.
   c) Dans quel cas a-t-on l'égalité $m = q$?

3. Comparaison de *m* et *g*
   a) Montrer que, pour tout $x > 0$, on a : $\ln x \leq x - 1$.
   b) En appliquant l'inégalité précédente successivement pour les nombres $x = \dfrac{a_1}{m}$, $x = \dfrac{a_2}{m}$, …, montrer que $g \leq m$.

c) Dans quel cas a-t-on l'égalité $g = m$?

4. Comparaison de g et h

a) En appliquant l'inégalité $g \leq m$ aux nombres $\frac{1}{a_1}, \ldots, \frac{1}{a_n}$, comparer g et h.

b) Dans quel cas a-t-on l'égalité $g = h$?